

Aula 17

*TJ-SP (Escrevente Judiciário) Raciocínio
Lógico e Matemática - 2024 (Pós-Edital)*

Autor:
**Equipe Exatas Estratégia
Concursos**

25 de Junho de 2024



Índice

1) Noções Introdutórias	3
2) Prisma	13
3) Pirâmide	20
4) Cilindro	28
5) Cone	32
6) Esfera	39
7) Inscrição e Circunscrição de Sólidos	41
8) Questões Comentadas - Introdução - Vunesp	55
9) Questões Comentadas - Prisma - Vunesp	63
10) Questões Comentadas - Pirâmide - Vunesp	90
11) Questões Comentadas - Cilindro - Vunesp	95
12) Questões Comentadas - Cone - Vunesp	106
13) Questões Comentadas - Esfera - Vunesp	108
14) Lista de Questões - Introdução - Vunesp	111
15) Lista de Questões - Prisma - Vunesp	114
16) Lista de Questões - Pirâmide - Vunesp	123
17) Lista de Questões - Cilindro - Vunesp	126
18) Lista de Questões - Cone - Vunesp	130
19) Lista de Questões - Esfera - Vunesp	132



CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Opa! Hoje é dia de Geometria Espacial.

Nessa aula, aprenderemos sobre os poliedros, algumas classificações e como calculamos volumes e áreas superficiais dos mais diversos sólidos! Ademais, assim como na Geometria Plana, veremos muitas fórmulas. Recomendo muito que você desenhe os sólidos e anote as fórmulas pertinentes, principalmente se ainda não possui familiaridade com o que veremos, tudo bem?

Para fechar, faça a lista de exercícios ao final. Mais uma vez, relembro que uma das melhores maneiras para fixar as fórmulas na cabeça, é por meio da prática exaustiva! É um conteúdo superlegal de ser estudado e muito cobrado em concursos. Qualquer problema, conte comigo para ajudá-lo, logo abaixo você poderá encontrar alguns meios de entrar em contato!

Uma ótima aula a todos e um forte abraço,
Prof. Francisco Rebouças.

Para **tirar dúvidas**, não deixe de utilizar **o nosso fórum**. Lá, estaremos sempre à disposição para ajudá-lo. Se preferir, você também **pode entrar em contato diretamente comigo** através dos seguintes canais:

E-mail - Prof. Francisco Rebouças:
prof.franciscoreboucas@gmail.com

"Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar onde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz." (Bill Gates)



GEOMETRIA ESPACIAL

Noções Introdutórias

Poliedros

O primeiro passo na Geometria Espacial é **entender o que é um poliedro**. Para isso, é preciso que você tenha feito a aula de Geometria Plana, pois usaremos muitos conceitos vistos lá. Vamos lá!

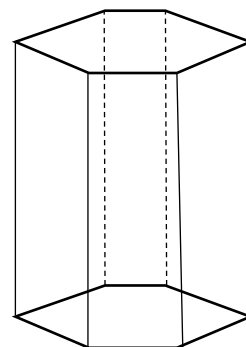
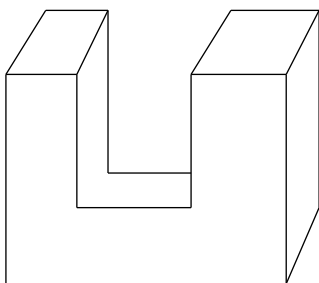
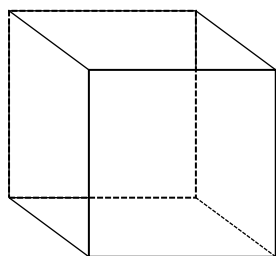


NOVIDADE!

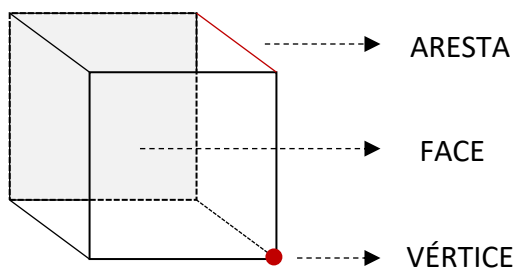
Poliedro é um sólido geométrico limitado por uma quantidade finita de polígonos. Além disso, é importante ressaltar que cada um desses polígonos divide um lado com um outro, vizinho a ele.

*Professor, é o quê?! Calma, aluno! Quando falamos assim, realmente parece um pouco complicado. No entanto, **vamos visualizar alguns poliedros**.*

Exemplos de Poliedros



Talvez o poliedro mais conhecido seja **o cubo** (que é o primeiro da esquerda na figura acima). Note que o cubo tem seis faces e cada uma dessas faces é um **quadrado**. Aproveitando esse cubo, vamos estudar alguns elementos que estão presentes nos poliedros de modo geral.



- A **face** normalmente é conhecida como o "lado" do poliedro. Uma observação importante é que ela sempre será um polígono.

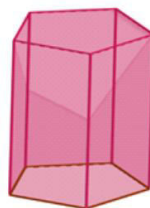
- A **aresta** é a intersecção de duas dessas faces. Ademais, também podemos defini-la como sendo o segmento de reta que une dois vértices.

- O **vértice** é o ponto de encontro das arestas. Ele forma um "cantinho" no referido sólido geométrico.

Esclarecido isso, podemos notar que **o cubo tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices**. Vocês também chegaram nesses números?!



(PREF. AREIAL/2021) As figuras representam uma pirâmide de base hexagonal e um prisma de base pentagonal. Analise as afirmações e coloque (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.



- () Somando as arestas da pirâmide e do prisma obtemos 27 arestas.
- () O prisma possui 2 vértices a mais que a pirâmide.
- () O prisma possui 10 arestas.
- () A pirâmide e o prisma possuem a mesma quantidade de faces.

Marque a alternativa que contém a sequência CORRETA de preenchimento dos parênteses.

- A) V, F, F e V.
- B) V, F, V e F.
- C) F, V, F e F.
- D) V, V, F e V.
- E) F, V, V e F.

Comentários:

(V) Somando as arestas da pirâmide e do prisma obtemos 27 arestas.

Lembre-se que uma **aresta é o segmento de reta que liga dois vértices**. Na pirâmide de base hexagonal que o enunciado trouxe, temos **12 arestas**. Por sua vez, no prisma de base pentagonal teremos mais **15 arestas**. Com isso, realmente **a soma das quantidades de arestas será 27**.



(F) O prisma possui 2 vértices a mais que a pirâmide.

O vértice é o ponto de encontro de duas arestas, ele forma um "canto" na nossa figura. Na pirâmide, perceba que temos 6 vértices na base e mais um no topo. Com isso, **contamos sete vértice**. Já no prisma, temos 5 vértices em cada base (superior e inferior). Com isso, totalizamos **10 vértices no prisma analisado**. Assim, note que **o prisma possui 3 vértices (e não 2) a mais que a pirâmide**.

(F) O prisma possui 10 arestas.

Como já havíamos contado na primeira afirmação, **o prisma possui 15 arestas e não 10**.

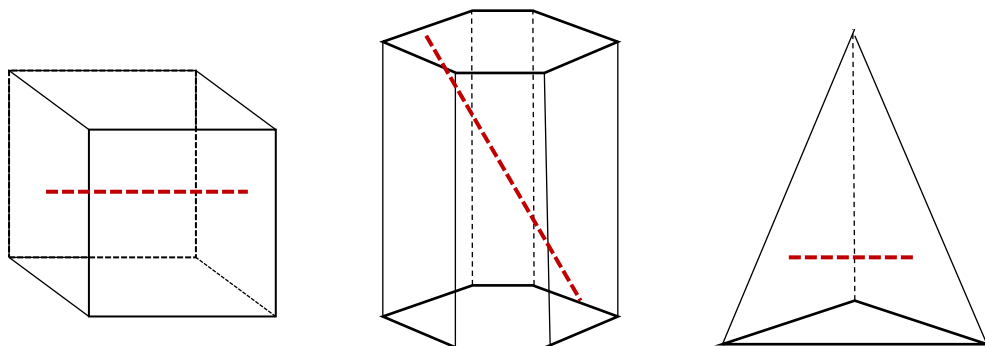
(V) A pirâmide e o prisma possuem a mesma quantidade de faces.

A face é o que chamamos de "lado" do poliedro. E é sempre um polígono (triângulo, retângulo, pentágono, por exemplo). No prisma que o enunciado trouxe, temos 5 faces laterais e 2 bases (que também contam como faces). Com isso, **são 7 faces no prisma**. Por sua vez, na pirâmide, temos 6 faces laterais e uma base (como falamos, também é uma face), **totalizando sete faces também**. Logo, afirmação correta.

Gabarito: LETRA A.

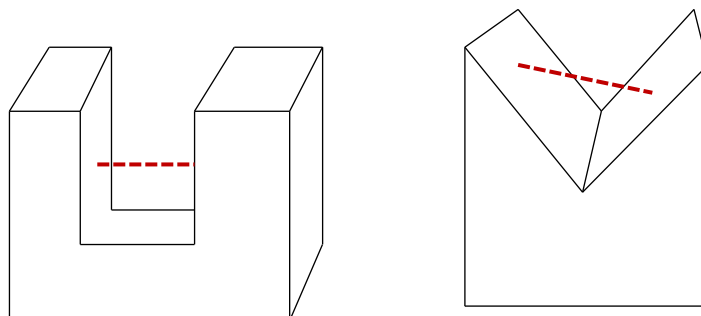
Agora, quero contar para vocês que podemos classificar os poliedros em convexos ou não convexos.

- **Poliedro Convexo**: todo poliedro em que qualquer segmento de reta com extremidades nas faces está inteiramente contido dentro do poliedro. Para melhor entendimento, veja alguns poliedros convexos.



Note que as retas que traçamos unindo pontos nas faces ficam totalmente dentro do poliedro!! Quando isso acontece para qualquer segmento de reta com essas características, o poliedro é convexo!

- **Poliedro Não Convexo (ou côncavo)**: qualquer poliedro que não seja convexo.



Nosso estudo se concentrará **nos poliedros convexos**.

Relação de Euler

A relação de Euler envolve a quantidade de vértices, faces e arestas em um **poliedro convexo**.

$$V + F = A + 2$$

- V é o **número de vértices**;
- F é o **número de faces**;
- A é o **número de arestas**.

Por exemplo, lembra quando contamos **o número de vértices, faces e arestas do cubo**? Nós encontramos:

$$F = 6;$$

$$A = 12;$$

$$V = 8;$$

Substituindo na expressão, temos que:

$$8 + 6 = 12 + 2 \rightarrow 14 = 14 \quad \checkmark$$

Note que a relação bate certinho para o cubo. Assim, com o intuito de entender como essa relação pode ser cobrada, vamos ver uma questão bem atual que exigiu o conhecimento da fórmula acima.



(PREF. ADUSTINA/2024) Um poliedro convexo tem uma face pentagonal e cinco faces triangulares. Se esse poliedro possui 6 vértices, então o número de arestas desse poliedro é:

- A) 6.
- B) 8.
- C) 10.
- D) 12.
- E) 14.

Comentários:

Para resolver esse problema, vamos usar a **relação de Euler** para os poliedros convexos, que diz que:



$$V + F = A + 2$$

Onde F é o número de faces, V é o número de vértices e A é o número de arestas.

Sabemos que o poliedro tem **uma face pentagonal** e **cinco faces triangulares**, então o número de faces é:

$$F = 1 + 5 = 6$$

Também sabemos que **o poliedro tem 6 vértices**, então $V = 6$. Substituindo esses valores na fórmula de Euler:

$$6 + 6 = A + 2$$

Simplificando:

$$A = 12 - 2$$

$$\boxed{A = 10}$$

Portanto, o número de arestas desse poliedro é 10.

Gabarito: LETRA C.

Poliedros de Platão

Os poliedros de Platão são poliedros que obedecem a **três condições básicas**:

- (i) Possuem o mesmo número de arestas em cada face;
- (ii) De cada vértice partem a mesma quantidade de arestas;
- (iii) Obedecem a relação de Euler.

Só existem **cinco classes** de poliedros que obedecem a todas essas condições: **o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro**.

Tetraedro	4 faces
Hexaedro	6 faces
Octaedro	8 faces
Dodecaedro	12 faces
Icosaedro	20 faces





(PREF. MASSAPÊ/2019) O que é um poliedro de Platão? Os poliedros de Platão são aqueles que possuem as seguintes propriedades:

- I. Todas as faces apresentam o mesmo número de _____;
- II. Todos os vértices possuem o mesmo número de arestas, isto é, se um vértice é a extremidade de três arestas, por exemplo, então todos serão também;
- III. É _____;
- IV. Seja o número de faces igual a F , de arestas igual a A e de vértices igual a V , então vale a seguinte relação, chamada de relação de _____: $V - A + F = 2$.

A sequência correta para o preenchimento de lacunas está em:

- A) Faces, côncavo, Euler;
- B) Faces, côncavo, Platão;
- C) Arestas, bidimensional, Platão;
- D) Arestas, convexo, Euler.

Comentários:

Questão apenas para ilustrar que as condições que acabamos de ver podem cair!

- I. Todas as faces apresentam o mesmo número de _____;
Vimos na nossa condição (i) que os **poliedros de Platão** apresentam o mesmo número de **arestas** em cada face.
- II. Todos os vértices possuem o mesmo número de arestas, isto é, se um vértice é a extremidade de três arestas, por exemplo, então todos serão também;
É a condição (ii) que vimos na teoria.
- III. É _____;
Essa aqui está implícito na condição (iii). Se eles obedecem a relação de Euler, então são poliedros **convexos**.
- IV. Seja o número de faces igual a F , de arestas igual a A e de vértices igual a V , então vale a seguinte relação, chamada de relação de _____: $V - A + F = 2$.
Nossa condição (iii). Trata-se da relação de **Euler**.

Gabarito: LETRA D.

Poliedros Regulares

Poliedros regulares são poliedros que também obedecem a algumas condições, quais sejam:

- (i) **suas faces são polígonos regulares;**
- (ii) de cada vértice **partem o mesmo número de arestas;**



(iii) são poliedros convexos.

Uma conclusão importante das condições acima é que **todo poliedro regular é um poliedro de Platão**, mas **nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular**. Vamos detalhar.

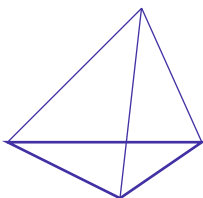
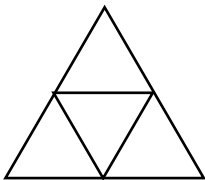
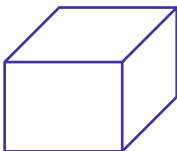
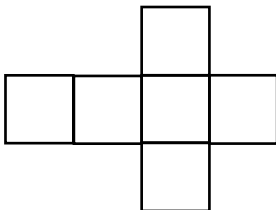
(i) Note que se as faces de um poliedro regular são polígonos regulares, então **toda face tem a mesma quantidade de arestas**, o que satisfaz a primeira condição que vimos para o Poliedro de Platão;

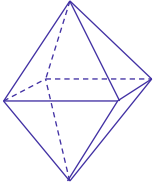
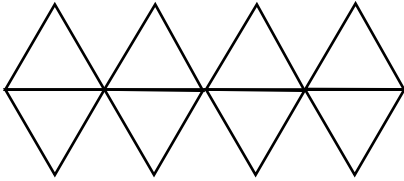
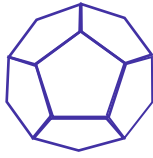
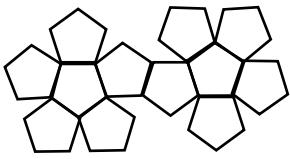
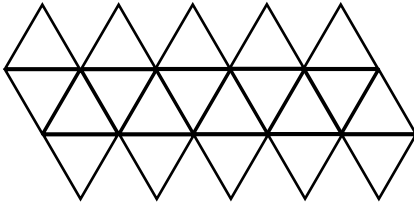
(ii) A segunda condição para ser um poliedro regular é exatamente a mesma para ser um poliedro de Platão.

(iii) Por sua vez, temos que para ser um poliedro regular, esse poliedro deve ser convexo. Vimos que **a relação de Euler vale para todo poliedro convexo**. Portanto, a terceira e última condição para o poliedro ser um poliedro de Platão também está satisfeita.

Vamos conhecer os Poliedros Regulares, eles também são cinco!



Poliedros Regulares		
Poliedro	Planificação	Informações
 Tetraedro Regular		O tetraedro regular é uma pirâmide em que todas as suas 4 faces são triângulos equiláteros. $V = 4$ $A = 6$
 Hexaedro Regular		O hexaedro regular é o "nome científico" do famoso cubo. Note que todas suas 6 faces são quadradas. $V = 8$ $A = 12$

 Octaedro Regular		O octaedro regular também é chamado de bipirâmide quadrada. As suas 8 faces são triângulos equiláteros. $V = 6$ $A = 12$
 Dodecaedro Regular		O dodecaedro regular é formado por 12 faces! Cada uma das faces é um pentágono regular. $V = 20$ $A = 30$
 Icosaedro Regular		O icosaedro regular é formado por 20 faces! Cada uma das faces é um triângulo equilátero. $V = 12$ $A = 30$



(PREF. RIACHO DOS CAVALOS/2022) Poliedros regulares são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares iguais. O poliedro regular que possui 6 vértices e 12 arestas é o:

- A) Octaedro
- B) Cubo
- C) Hexaedro
- D) Dodecaedro
- E) Icosaedro

Comentários:

Inicialmente, precisamos aplicar a **relação de Euler** para encontrar o número de faces desse poliedro.



$$V + F = A + 2$$

Onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces. Dados $V = 6$ e $A = 12$, temos:

$$6 + F = 12 + 2$$

Isolando F :

$$\boxed{F = 8}$$

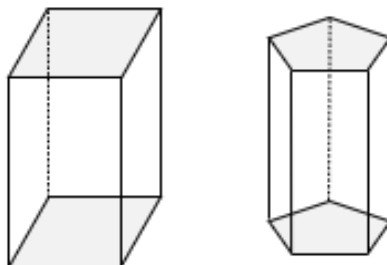
Logo, como se trata de um poliedro de oito faces, podemos concluir que é o **octaedro**.

Gabarito: LETRA A.

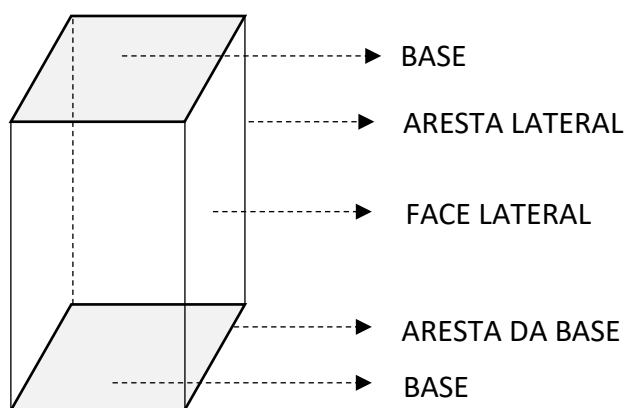


Prisma

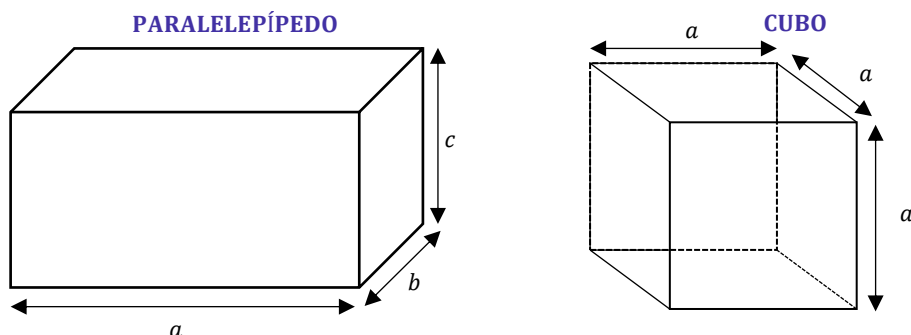
O prisma é um poliedro convexo que possui **duas bases paralelas distintas** (que são polígonos). **As faces laterais são paralelogramos**. Vamos conhecer alguns.



O prisma da esquerda é chamado de **prisma quadrangular**, pois sua base é um quadrilátero. Por sua vez, o prisma da direita é um **prisma pentagonal**, pois sua base é um pentágono. Vamos conhecer seus elementos.



Todos os prismas terão os elementos acima. *Especial atenção nas duas bases paralelas, ok?! Dito isso, quero apresentar para dois prismas bem famosos.*



Esses dois sólidos geométricos **são os mais comuns em prova!!** Todos dois são prismas quadrangulares. A principal diferença entre os dois é que, no cubo, **todas as arestas possuem a mesma medida**. Normalmente, as questões vão nos perguntar sobre áreas e volumes. Vamos falar sobre isso!



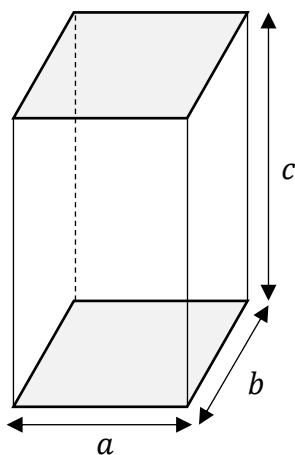
Áreas

A **área total da superfície de um prisma** é calculada por meio da seguinte soma:

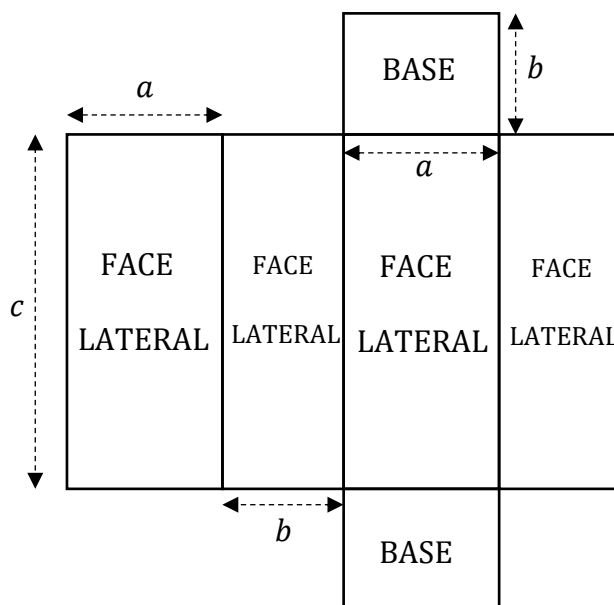
$$A_{total} = A_{lateral} + 2A_{base}$$

Observe que a área total é composta de duas parcelas. A área lateral e a área da base.

- **Área Lateral ($A_{lateral}$):** soma das áreas das faces laterais. No prisma, as faces laterais são paralelogramos (mais especificamente, serão retângulos quando os prismas forem retos).
- **Área da Base (A_{base}):** É a área do polígono que está na base. Se a base for um quadrado, será a área do quadrado, se for um pentágono, será a área do pentágono etc.



No paralelepípedo acima, vemos que **as bases são retângulos de lados "a" e "b"**, enquanto **as faces são dois retângulos de lados "b" e "c"** e **outros dois de lados "a" e "c"**. Podemos visualizar isso com a planificação.



- Cálculo da Área Lateral:

Temos quatro faces laterais. Nos prismas retos, elas serão retângulos. Aprendemos na aula de Geometria Plana que a área de retângulos é calculada pelo produto de suas duas dimensões. Assim,

$$A_{lateral} = ac + bc + ac + bc \rightarrow A_{lateral} = 2ac + 2bc$$

- Cálculo da Área da Base:

A base é um retângulo de lados "a" e "b". Assim,

$$A_{base} = ab$$

- Cálculo da Área Total:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Vamos substituir o que achamos.

$$A_{total} = 2ac + 2bc + 2ab$$

$$A_{total} = 2(ac + bc + ab)$$

Essa é a **área superficial de um paralelepípedo**. Ela aparece em provas com uma certa frequência! Nos cubos, todas as arestas são iguais a "a", podemos fazer o seguinte:

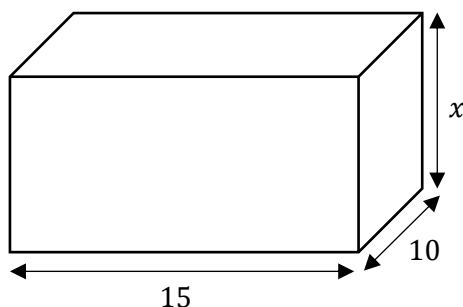
$$A_{total} = 2 \cdot (a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \rightarrow A_{total} = 2 \cdot (a^2 + a^2 + a^2) \rightarrow A_{total} = 2 \cdot 3a^2$$

$$A_{total} = 6a^2$$

Essa é a **área superficial de um cubo**! Vamos praticar um pouco essa teoria.



(PREF. CARAGUATATUBA/2024) A figura a seguir apresenta uma caixa no formato de um paralelepípedo com as medidas de suas dimensões registradas.



Assinale a opção que apresenta a expressão algébrica referente à área da superfície de toda a caixa.

- A) $50x + 300$.
- B) $50x + 150$.
- C) $25x + 300$.
- D) $25x + 150$.
- E) $10x + 150$.

Comentários:

Para resolver essa questão, devemos lembrar que a **área da superfície de um paralelepípedo** é a soma das áreas de todas as suas faces. **Cada face é um retângulo**, então a sua área é o produto dos comprimentos dos seus lados. No caso da caixa, temos:

- Duas faces com dimensões 15 e 10, que têm área igual a $15 \cdot 10 = 150$ cada uma.
- Duas faces com dimensões 15 e x , que têm área igual a $15 \cdot x = 15x$ cada uma.
- Duas faces com dimensões 10 e x , que têm área igual a $10 \cdot x = 10x$ cada uma.

Somando as áreas de todas as faces, obtemos a expressão algébrica para a área da superfície da caixa:

$$A = 2 \cdot 150 + 2 \cdot 15x + 2 \cdot 10x$$

$$A = 300 + 30x + 20x$$

$$\boxed{A = 50x + 300}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra A.

Obs.: Podemos aplicar diretamente os valores das dimensões na fórmula que deduzimos anteriormente.

$$A_{total} = 2(ac + bc + ab)$$

$$A_{total} = 2(15 \cdot 10 + 10 \cdot x + 15 \cdot x)$$

$$A_{total} = 2(150 + 25x)$$

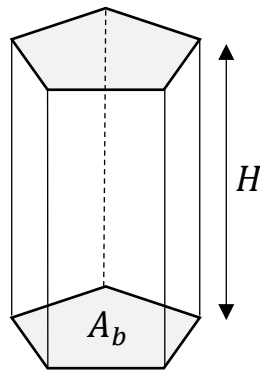
$$A_{total} = 300 + 50x$$

Gabarito: LETRA A.

Volume

Quando calculamos o volume de algum sólido, estamos **quantificando o espaço que está sendo ocupado por ele**. Considere o prisma abaixo, como exemplo,

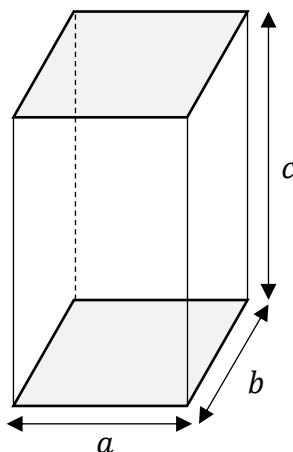




Para calcular o volume de prismas, usamos a seguinte expressão:

$$V = A_b H$$

Em que A_b é a área da base e H é a altura. No caso do paralelepípedo, vamos ter o seguinte:



A base é um retângulo de lados "a" e "b". Assim, sua área é dada por: $A_b = ab$. Por sua vez, temos uma altura de medida "c". O volume fica:

$$V = abc$$

Esse é o volume de um paralelepípedo! Cai demais em questões! Ele é dado pelo produto das três dimensões! No caso do cubo, lembre-se que todas as arestas medem "a". Logo,

$$V = a \cdot a \cdot a$$

$$V = a^3$$

Esse é a fórmula para calcularmos o volume de um cubo.





(PREF. PAULO BENTO/2024) A caixa d'água de um prédio com formato de paralelepípedo retângulo tem as seguintes medidas: 2,8 m; 3 m; 1,5 m. Sua capacidade, em litros, é de:

- A) 7.300.
- B) 8.900.
- C) 10.500.
- D) 11.200.
- E) 12.600.

Comentários:

A capacidade da caixa d'água corresponde ao seu volume. Sendo assim, para encontrá-lo, basta multiplicar as dimensões do paralelepípedo retângulo.

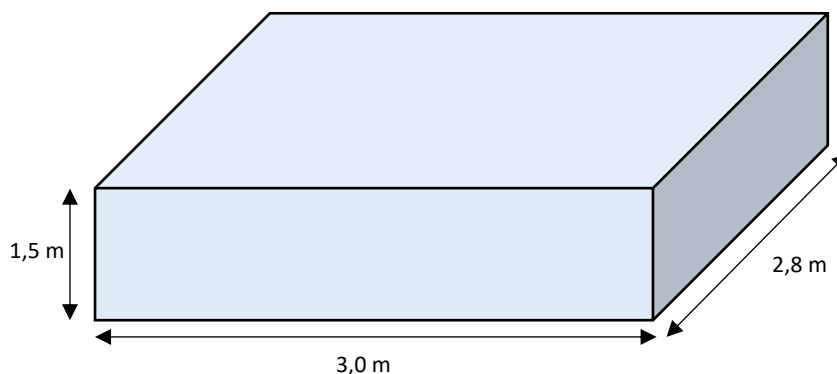
$$V = 2,8 \cdot 3 \cdot 1,5$$

$$V = 12,6 \text{ m}^3$$

Lembrando que **1 m³ equivale a 1000 litros**, temos:

$$V = 12.600 \text{ L}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra E.



Gabarito: LETRA E.



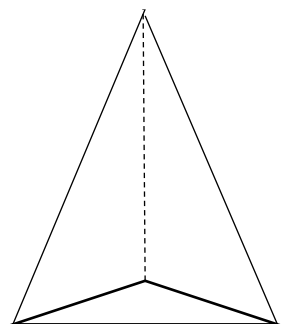


Nome	Prisma	Área Superficial e Volume
Paralelepípedo		$A_{total} = 2 \cdot (ac + bc + ab)$ $V = abc$
Cubo		$A_{total} = 6a^2$ $V = a^3$
Prisma Qualquer		$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$ $V = A_b H$

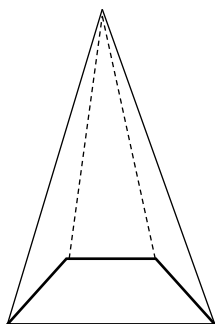


Pirâmide

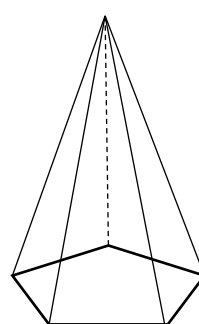
Chegou a vez de falarmos das pirâmides! **Elas são poliedros!** Aqui, faces laterais serão triângulos!! Observe algumas.



PIRÂMIDE
TRIANGULAR



PIRÂMIDE
QUADRANGULAR



PIRÂMIDE
PENTAGONAL

Note que nas pirâmides, **vamos ter uma única base**. Ademais, algumas arestas que partem da base se encontram em um ponto superior, que vamos chamar de **vértice da pirâmide**.

Áreas

A área superficial total de uma pirâmide é calculada de maneira muito semelhante à que vimos anteriormente para prismas. A diferença é que **não multiplicaremos a área da base por 2**, afinal, **aqui só temos uma única base mesmo**.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$



(PREF. CANDIOTA/2023) Uma pirâmide regular com base hexagonal tem altura igual a 5 u.c., e as arestas da base medem 3 u.c.. A área total (área da base mais área lateral) dessa pirâmide é:

- A) $(27\sqrt{3} + 9\sqrt{127})/2$
- B) $36\sqrt{3}/2$
- C) $36\sqrt{127}/2$
- D) $(10\sqrt{3} + 15\sqrt{5})/2$
- E) $(36\sqrt{2} + 4\sqrt{5})/2$



Comentários:

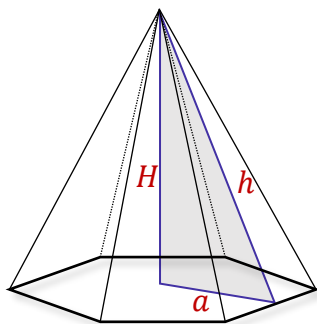
Vamos encontrar a área da base e a área lateral da pirâmide. Sabemos que a base é um **hexágono regular**, ou seja, tem **seis lados iguais**. A área de um hexágono regular é dada pela fórmula:

$$A = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

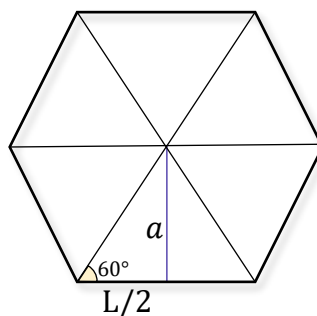
Onde L é o comprimento do lado do hexágono. Substituindo L por 3, temos:

$$A_b = \frac{3 \cdot 3^2\sqrt{3}}{2} \rightarrow A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

Essa é a **área da base da pirâmide**. Agora, vamos encontrar a área lateral. Para isso, precisamos calcular a altura de uma face triangular da pirâmide. Podemos usar **o teorema de Pitágoras** para isso, pois temos um triângulo retângulo formado pela altura da pirâmide, pela altura do triângulo da face e pelo apótema da base. Veja a figura abaixo:



O apótema da base "a" corresponde a altura do triângulo equilátero que "compõe" o hexágono da base.



Podemos relacionar o apótema com o lado do hexágono por meio da tangente de 60°:

$$\tan 60^\circ = \frac{a}{\left(\frac{L}{2}\right)} \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}L}{2}$$



Substituindo $L = 3$:

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Agora, voltando para **o triângulo retângulo destacado na pirâmide**, temos:

$$h^2 = H^2 + a^2$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$h^2 = 5^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 25 + \frac{9 \cdot 3}{4}$$

$$h^2 = 25 + \frac{27}{4}$$

$$h^2 = \frac{127}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{127}}{2}$$

Agora podemos calcular a área lateral da pirâmide, que **é a soma das áreas dos seis triângulos** que formam as faces laterais. A área de um triângulo é dada pela fórmula:

$$A = \frac{bh}{2}$$

Onde b é a base do triângulo e h é a altura. Nesse caso, a base do triângulo é o lado da base da pirâmide, que vale 3 u.c., e a altura vale $\sqrt{127}/2$. Então, a área de um triângulo é:

$$A = \frac{3 \left(\frac{\sqrt{127}}{2} \right)}{2} \rightarrow A = \frac{3\sqrt{127}}{4}$$

Como temos seis triângulos, a área lateral da pirâmide é:

$$A_l = 6 \cdot \frac{3\sqrt{127}}{4}$$



$$A_l = \frac{9\sqrt{127}}{2}$$

Finalmente, para encontrar a área total da pirâmide, basta **somar a área da base com a área lateral**:

$$A_t = A_b + A_l$$

$$A_t = \frac{27\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{127}}{2}$$

$$A_t = \frac{27\sqrt{3} + 9\sqrt{127}}{2} \text{ u. a.}$$

Gabarito: LETRA A.

Volume

Por sua vez, o volume de uma pirâmide é calculado por meio da seguinte expressão:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Em que A_b é a **área da base** e H é a **altura**. Uma observação importante é que **há a divisão por 3**, fato que não acontece para os prismas.



(PREF. RIO BONITO/2024) Nilton esculpiu uma pirâmide de madeira com 8 cm de altura. Se a base dessa pirâmide é um quadrado de 12 cm de perímetro, então o volume total dessa pirâmide é igual a:

- A) 96 cm³
- B) 72 cm³
- C) 32 cm³
- D) 24 cm³

Comentários:

Nessa questão, usaremos a fórmula do **volume da pirâmide**:



$$V = \frac{A_b H}{3}$$

onde V é o volume, A_b é a área da base e H é a altura. A base da pirâmide é um **quadrado de perímetro 12 cm**. Isso significa que cada lado do quadrado mede:

$$\frac{12}{4} = 3 \text{ cm}$$

Logo, a área da base é:

$$A_b = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$$

A altura da pirâmide é 8 cm. Substituindo esses valores na fórmula, temos:

$$V = \frac{9 \cdot 8}{3}$$

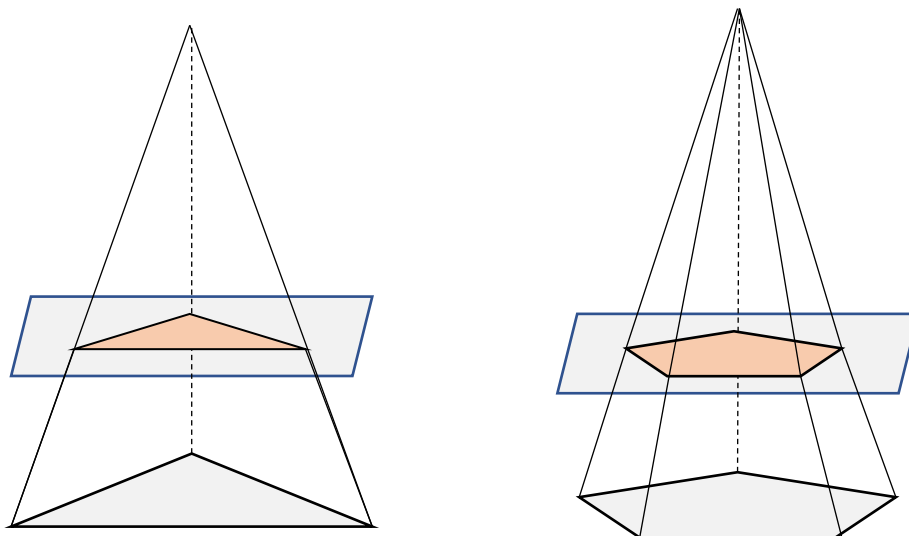
$$\boxed{V = 24 \text{ cm}^3}$$

Portanto, **o volume total da pirâmide é igual a 24 cm³**, que corresponde à alternativa D.

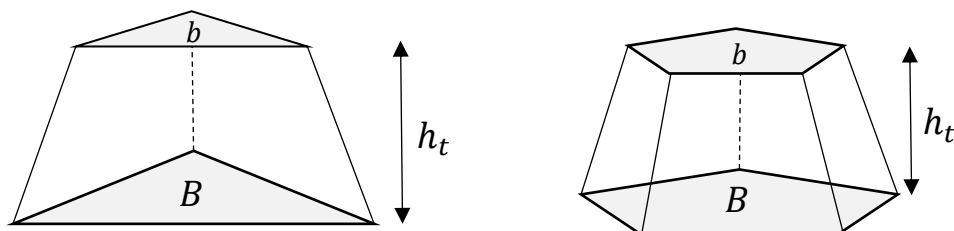
Gabarito: LETRA D.

Tronco de Pirâmide

Grosso modo, o tronco de pirâmide é um pedaço dela. Observe a situação:



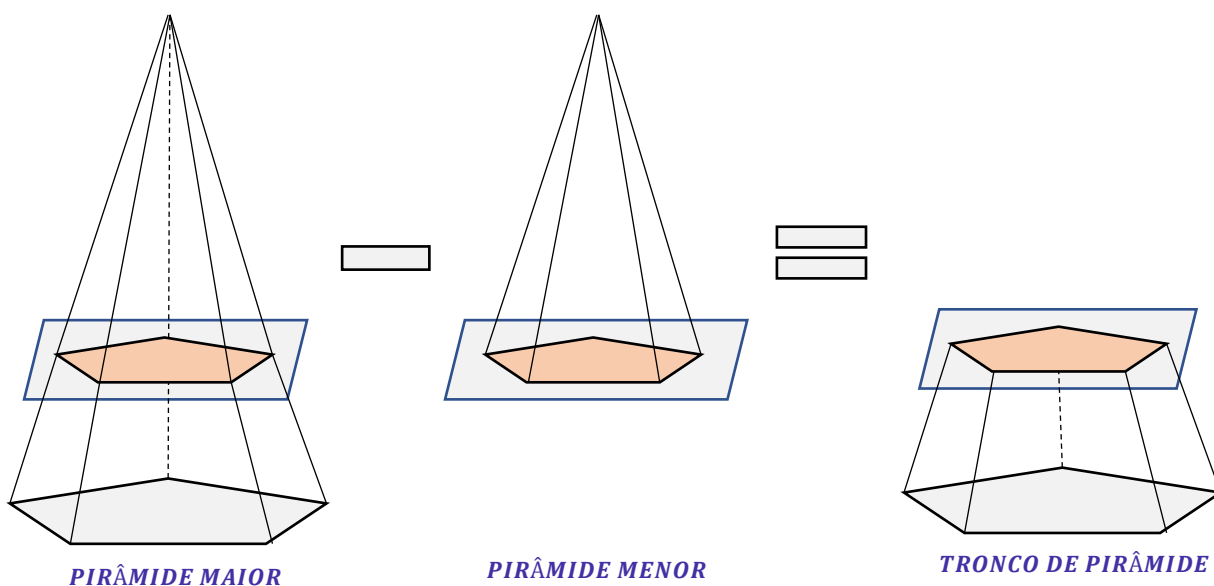
Temos um plano paralelo à base seccionando as pirâmides. Esse plano divide a pirâmide maior em duas partes: **uma pirâmide menor, na parte superior**, e **um tronco de pirâmide, na parte inferior**. Vou separar apenas os troncos para podermos analisá-los melhor.



h_t é a altura do tronco, enquanto **B** representa a área da base maior e **b**, a área da base menor.

O volume desses troncos pode ser calculado de duas formas.

Para chegarmos na primeira forma, é importante entendermos o seguinte:



Assim, veja que podemos calcular o volume de um tronco pegando **o volume da pirâmide maior e subtraindo o volume da pirâmide menor**. Assim,

$$V_{\text{tronco}} = V_{\text{pirâmide maior}} - V_{\text{pirâmide menor}}$$

A segunda forma de calcularmos o volume de um tronco de pirâmide é aplicando a fórmula abaixo:

$$V = \frac{h_T}{3} (B + \sqrt{Bb} + b)$$



Relembrando: h_t é a altura do tronco, enquanto B representa a área da base maior e b , a área da base menor.

Para nosso curso, **não há custo benefício em demonstrar a expressão acima**. Ela cai muito raramente e em concursos específicos da área da matemática. De qualquer forma, na maioria das vezes poderemos usar a primeira alternativa.

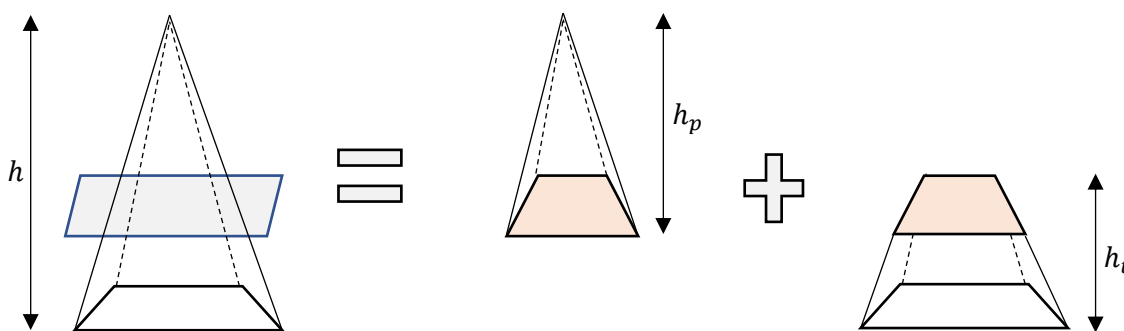


(PREF. SOLÂNEA/2019 - ADAPTADA) Uma pirâmide regular de base quadrada com h cm de altura é seccionada por um plano paralelo à base, determinando dois sólidos: uma pirâmide menor e um tronco de pirâmide. O volume do tronco de pirâmide é sete vezes o volume da pirâmide menor. Pode-se afirmar que a altura do tronco é: (use: $B/b = 4$)

- A) $h/5$ cm
- B) $h/3$ cm
- C) $h/6$ cm
- D) $h/4$ cm
- E) $h/2$ cm

Comentários:

Temos a seguinte situação:



O enunciado disse que o volume do tronco de pirâmide é sete vezes o volume da pirâmide menor. Assim,

$$V_{\text{tronco}} = 7 \cdot V_{\text{pirâmide menor}} \quad (1)$$

Ademais, sabemos que:

$$V_{\text{tronco}} = V_{\text{pirâmide maior}} - V_{\text{pirâmide menor}} \quad (2)$$



Substituindo (1) em (2):

$$7 \cdot V_{\text{pirâmide menor}} = V_{\text{pirâmide maior}} - V_{\text{pirâmide menor}}$$

Logo,

$$V_{\text{pirâmide maior}} = 8 \cdot V_{\text{pirâmide menor}} \quad (3)$$

Sabemos que o volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

- Para a pirâmide maior, ficamos com:

$$V_{\text{pirâmide maior}} = \frac{Bh}{3}$$

- Para a pirâmide menor, ficamos com:

$$V_{\text{pirâmide menor}} = \frac{bh_p}{3}$$

Assim, usando esses dois resultados em (3):

$$\frac{Bh}{3} = \frac{8bh_p}{3} \quad \rightarrow \quad h_p = \left(\frac{B}{b}\right) \frac{h}{8}$$

Usando o dado do enunciado que $\frac{B}{b} = 4$, ficamos com:

$$h_p = 4 \cdot \frac{h}{8} \quad \rightarrow \quad h_p = \frac{h}{2}$$

Essa é a altura da pirâmide menor em função de h. Para encontrar a altura do tronco, fazemos:

$$h_t = h - h_p$$

Substituindo,

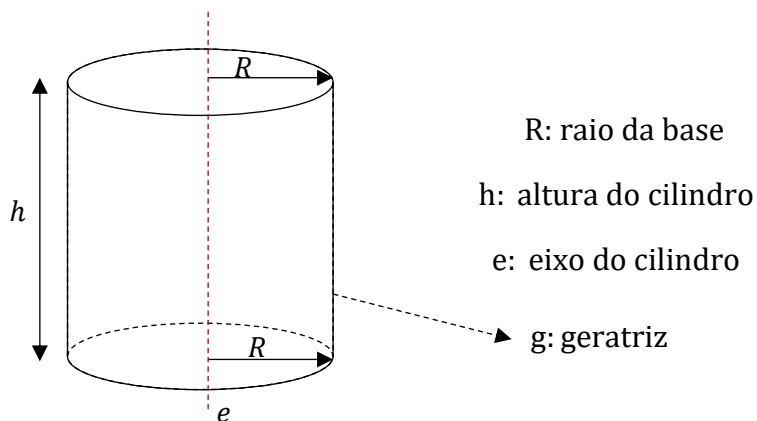
$$h_t = h - \frac{h}{2} \quad \rightarrow \quad h_t = \frac{h}{2}$$

Gabarito: LETRA E.



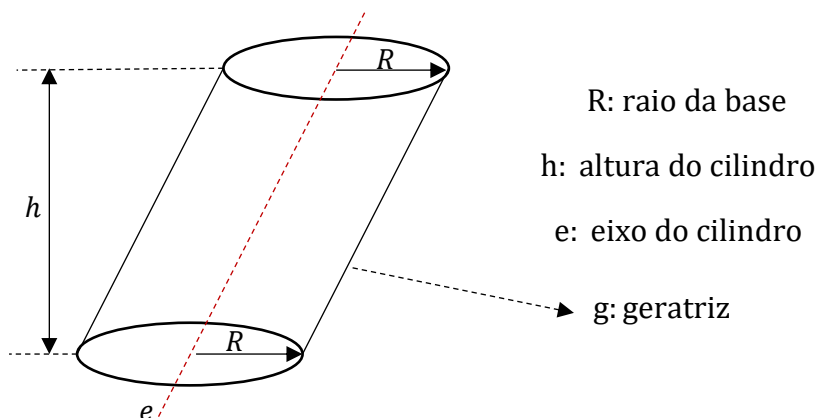
Cilindro

Opa!! Entramos nos cilindros! Nesse ponto, deixamos de falar de poliedros. O cilindro, o cone e a esfera são exemplos dos **corpos redondos**. A partir desse ponto, não precisaremos mais falar de vértices, arestas ou faces. Observe os elementos de um cilindro.



Esse é um cilindro circular reto. Chamamos o cilindro de reto quando **a geratriz for perpendicular ao plano das bases**.

Agora, observe um exemplo de cilindro circular oblíquo.



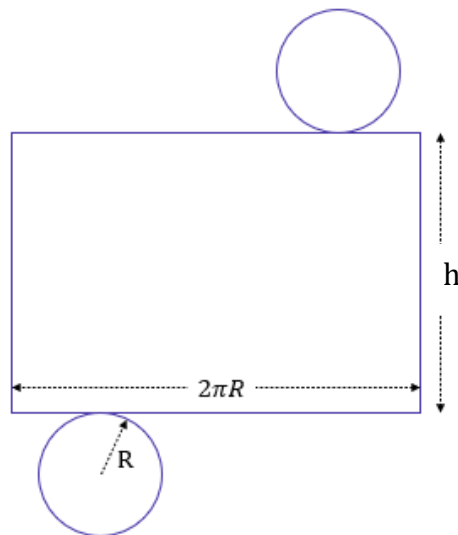
Na maioria das vezes, **lidaremos com cilindros retos**.

No entanto, vale a pena saber que também existem os cilindros oblíquos, tudo bem?

Áreas

Para calcular a área superficial, é interessante planificarmos o cilindro circular reto.





Observe que quando planificamos um cilindro, a sua lateral é um retângulo de lados " $2\pi R$ " e " h ". Logo,

$$A_{lateral} = 2\pi R h$$

Por sua vez, as bases são círculos. Com isso, a área da base fica:

$$A_{base} = \pi R^2$$

Como temos duas bases, devemos considerar essa área duas vezes. Assim, a área superficial total fica:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{total} = 2\pi R h + 2\pi R^2$$

Colocando $2\pi R$ em evidência:

$$A_{total} = 2\pi R (h + R)$$



(CM VENÂNCIO AIRES/2024) No cilindro apresentado na figura abaixo, a altura e o diâmetro da base medem, respectivamente, 16 e 12 metros. Nessas condições, qual é (em metros quadrados) a área lateral do cilindro? (Considere $\pi \approx 3,1$)





- A) 297,6.
- B) 595,2.
- C) 892,8.
- D) 1.190,4.
- E) 1.785,6.

Comentários:

A área lateral de um cilindro é dada pelo produto da circunferência da base pela altura. Ou seja:

$$A_{lateral} = 2\pi Rh$$

Onde R é o raio da base e h é a altura do cilindro.

No caso, temos que o diâmetro da base é 12, então **o raio é metade disso, ou seja, 6. A altura é 16.**

Substituindo na fórmula, temos:

$$A_{lateral} = 2 \cdot 3,1 \cdot 6 \cdot 16 \rightarrow A_{lateral} = 595,2$$

Portanto, a alternativa correta é a letra B.

Gabarito: LETRA B.

Volume

O volume de um cilindro é calculado da mesma forma que fizemos para o prisma.

$$V = A_b h$$

Como sabemos que a área da base é πR^2 , podemos substituir:

$$V = \pi R^2 h$$



(PREF. ADUSTINA/2024) Uma lata de doce de coco cremoso tem formato cilíndrico, com 9 cm de diâmetro e 10 cm de altura. Qual é, aproximadamente, a capacidade dessa lata? Use 3,14 como aproximação para π .

- A) 500,25 cm³.
- B) 540,75 cm³.
- C) 600,80 cm³.
- D) 635,85 cm³.
- E) 675,50 cm³.

Comentários:

Precisamos usar a fórmula do volume do cilindro:

$$V = \pi R^2 h$$

onde R é o raio da base e h é a altura.

O enunciado nos dá o diâmetro da lata, que é 9 cm, mas precisamos dividir por 2 para obter **o raio, que é 4,5 cm**. **A altura da lata é 10 cm**. Substituindo esses valores na fórmula, temos:

$$V = 3,14 \cdot (4,5)^2 \cdot 10$$

$$V = 3,14 \cdot 20,25 \cdot 10$$

$$V = 63,585 \cdot 10$$

$$V = 635,85 \text{ cm}^3$$

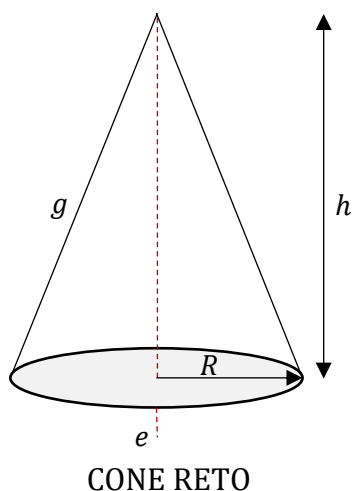
Portanto, **a capacidade aproximada da lata é 635,85 cm³**.

Gabarito: LETRA D.

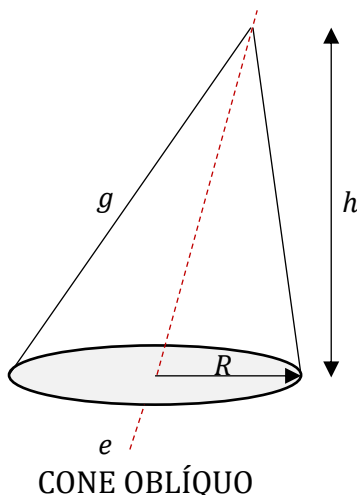


Cone

Nosso próximo corpo redondo **é o cone**! É a forma da casquinha de sorvete! Assim como nos cilindros, temos a "versão reta" e a "versão oblíqua". Vamos analisá-las.



CONE RETO



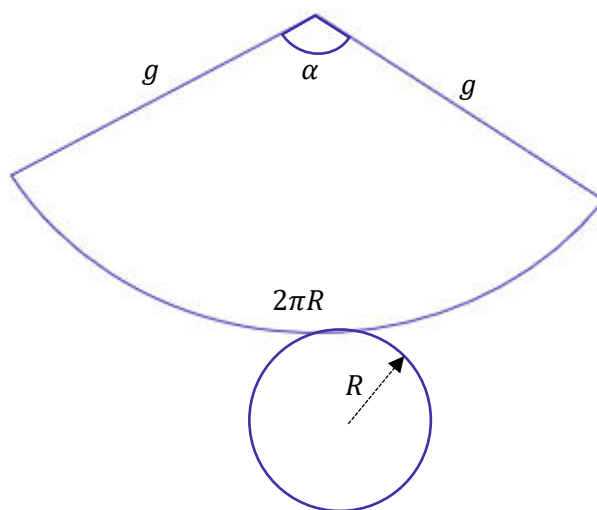
CONE OBLÍQUO

R: raio da base
h: altura do cilindro
e: eixo do cilindro
g: geratriz

Observe que, no cone reto, **o eixo é perpendicular ao plano da base**. Por sua vez, no cone oblíquo, o eixo não será perpendicular. *Apresentados ao cone?! Vamos aprender como calcular sua área superficial e seu volume.*

Áreas

Assim como fizemos anteriormente, é interessante **planificarmos o cone** para entendermos como sua área superficial é calculada.



Observe que **a área lateral é a área de setor circular** cujo ângulo central é α e raio é igual a geratriz. Por meio de uma regra de três, podemos encontrar que:

$$A_{lateral} = \pi Rg$$

Por sua vez, a base é um círculo. Sua área sai mais rapidamente:

$$A_{base} = \pi R^2$$

A área superficial total é a soma das duas.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

$$A_{total} = \pi Rg + \pi R^2$$

$$A_{total} = \pi R \cdot (g + R)$$

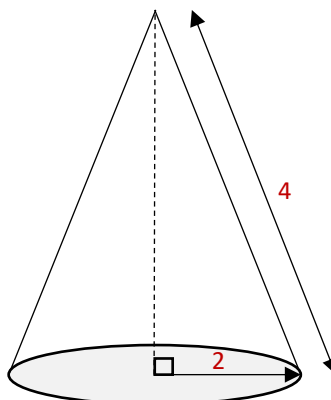


(IFC/2023) A superfície lateral de um cone de raio 2 e geratriz 4 é dada por:

- A) 4π
- B) 6π
- C) 8π
- D) 10π
- E) 12π

Comentários:

A área lateral de um cone é dada por $A_{lateral} = \pi r g$. Perceba que **temos a geratriz e o raio do cone**. Sendo assim, podemos aplicar tais valores diretamente na fórmula para encontrarmos a superfície lateral.



$$A_{lateral} = \pi r g \rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot 2 \cdot 4 \rightarrow \boxed{A_{lateral} = 8\pi \text{ cm}^2}$$

Gabarito: LETRA C.

Volume

Já o volume de cone é semelhante ao que vimos para a pirâmide.

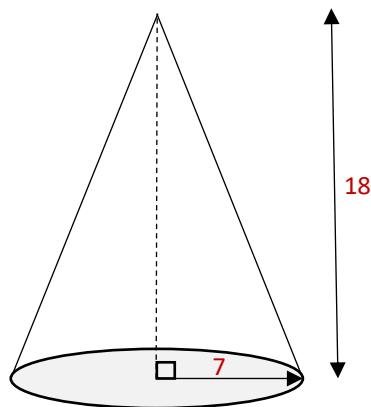
$$V = \frac{A_b h}{3}$$

Como sabemos que a base de um cone é um círculo, podemos usar que $A_b = \pi R^2$.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$



(FIEC/2023) Assinale a alternativa que corresponde ao volume do cone ilustrado abaixo.



(Considere $\pi = 3,14$)

- A) 912,22 m³.
- B) 864,13 m³.
- C) 923,16 m³.
- D) 886,20 m³.
- E) 916,18 m³.



Comentários:

Questão bem direta em que devemos aplicar a fórmula do **volume de um cone**.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

De acordo com o enunciado, temos que $\pi = 3,14$, $R = 7$ e $h = 18$. Substituindo:

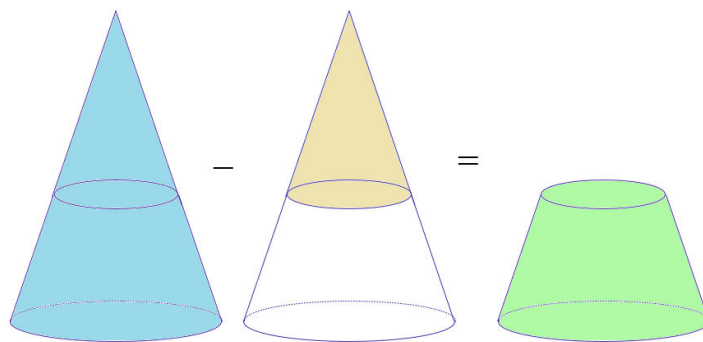
$$V = \frac{3,14 \cdot 7^2 \cdot 18}{3}$$

$$V = 923,16 \text{ m}^3$$

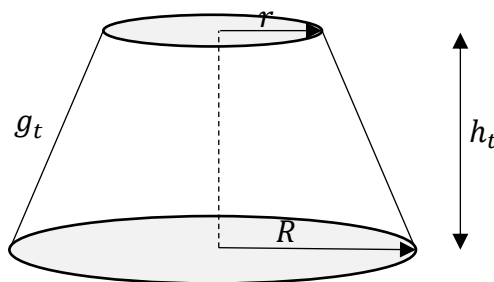
Gabarito: LETRA C.

Tronco de Cone

Assim como na pirâmide, temos também o tronco de cone. Ele é formado da mesma forma: cortamos um cone maior com um plano paralelo a base. Esse corte divide o cone maior em duas partes: **um cone menor**, na parte superior, e **um tronco de cone**, na parte inferior. Observe como podemos imaginar a situação:



O tronco de cone está representado em verde. Vamos detalhar um pouco mais seus elementos.



R: raio da base maior

r: raio da base menor

h_t : altura do tronco

g_t : raio da base



Temos duas formas de calcular o **volume do tronco de cone**. A primeira é subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior.

$$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor}$$

A outra alternativa é por meio da seguinte fórmula:

$$V = \frac{\pi h_t}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Mais uma vez, não fique tão assustado com essa parte relativa aos troncos, ela ainda não é nada comum em concursos. Coloco aqui para deixar nosso material mais completo, pois pode ser cobrado eventualmente.



HORA DE
PRATICAR!



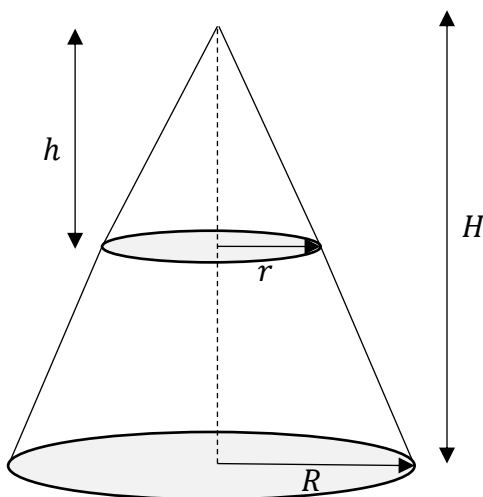
ESTA É
DIFÍCIL!

(CRESS 6/2024) Um cone de altura H é cortado por um plano paralelo à sua base, formando dois sólidos de volume igual: um cone e um tronco de cone. Com base nessa informação, assinale a alternativa que apresenta a altura do cone menor formado.

- A) $H/8$
- B) $\sqrt{2}H/6$
- C) $\sqrt{2}H/2$
- D) $\sqrt{3}H/2$
- E) $\sqrt[3]{4}H/2$

Comentários:

Vamos esquematizar a situação.



De acordo com o enunciado, temos que **o volume do tronco é igual ao volume do cone menor**. Dessa forma, podemos escrever que:

$$V_{\text{tronco}} = V_{\text{cone menor}} \quad (1)$$

Além disso, lembre-se que o volume de um tronco de cone pode ser calculado da seguinte forma:

$$V_{\text{tronco}} = V_{\text{cone maior}} - V_{\text{cone menor}} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$V_{\text{cone menor}} = V_{\text{cone maior}} - V_{\text{cone menor}} \quad \rightarrow \quad V_{\text{cone menor}} = \frac{V_{\text{cone maior}}}{2}$$

Com isso, lembre-se que **o volume de um cone** é expresso por:

$$V_{\text{cone}} = \frac{A_b H}{3}$$

Olhando para a figura que desenhamos, podemos escrever que:

- Para o cone maior: $A_b = \pi R^2$
- Para o cone menor: $A_b = \pi r^2$
- A altura do cone maior é H .
- A altura do cone menor é h .

Assim,

$$V_{\text{cone maior}} = \frac{\pi R^2 H}{3} \quad V_{\text{cone menor}} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

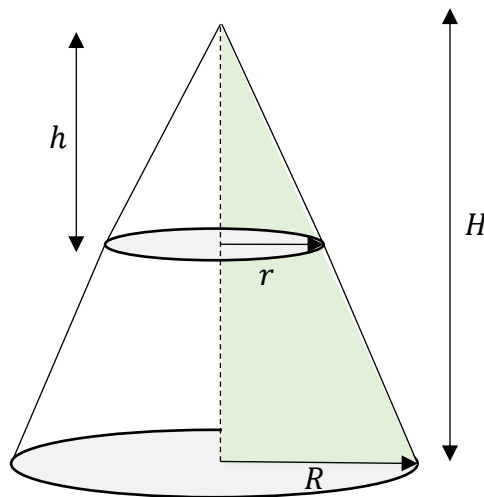
Substituindo na expressão que obtemos anteriormente.

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Simplificando,

$$2r^2 h = R^2 H \quad (3)$$





Observe o triângulo retângulo destacado. Nós podemos desenvolver uma **semelhança de triângulos**.

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \rightarrow r = R \cdot \left(\frac{h}{H}\right) \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$2 \left(\frac{Rh}{H}\right)^2 h = \frac{2R^2 h^2}{H^2} = R^2 H$$

Podemos **cortar os raios (R)**.

$$\frac{2h^3}{H^2} = H \rightarrow 2h^3 = H^3$$

Tirando **a raiz cúbica** dos dois lados.

$$\sqrt[3]{2h^3} = \sqrt[3]{H^3} \rightarrow \sqrt[3]{2} \cdot h = H$$

Isolando o "h".

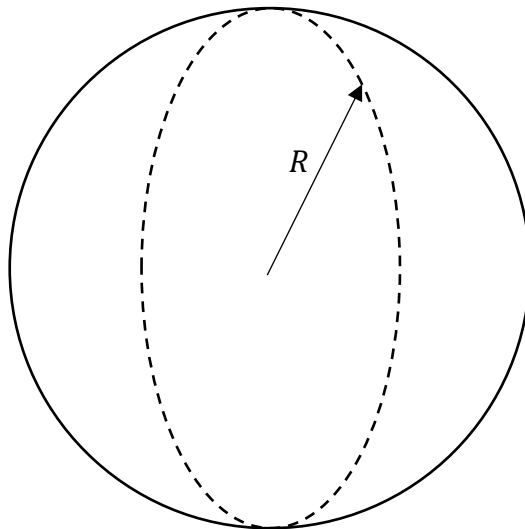
$$h = \frac{H}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow h = \frac{H}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} \rightarrow \boxed{h = \frac{H\sqrt[3]{4}}{2}}$$

Gabarito: LETRA E.



Esfera

Chegamos ao nosso último sólido e corpo redondo! **A esfera!** Acredito que é o que temos mais familiaridade e a abordaremos de forma bem direta nessa aula. Observe o seu formato.



Sobre a esfera, as questões **gostam de explorar a sua área superficial**. Para calculá-la, utilizamos a fórmula:

$$A_s = 4\pi R^2$$

Essa é uma outra fórmula em que o custo benefício de demonstrá-la é praticamente nulo.



(PREF. SR CANAÃ/2019) A área da superfície de uma esfera de diâmetro 6 m é: (dado: $\pi = 3$)

- A) 18 m².
- B) 36 m².
- C) 81 m².
- D) 108 m².
- E) 212 m².

Comentários:

Galera, a área superficial de uma esfera é dada:

$$A_s = 4\pi R^2$$

O enunciado nos forneceu o diâmetro. Sabemos que **o diâmetro é o dobro do raio**. Assim,



$$D = 2R \rightarrow R = \frac{D}{2} \rightarrow R = \frac{6}{2} \rightarrow R = 3 \text{ m}$$

O raio da esfera é 3 m. Podemos substituir na fórmula, não esquecendo que a questão pediu para considerar $\pi = 3$.

$$A_s = 4 \cdot 3 \cdot 3^2 \rightarrow A_s = 12 \cdot 9 \rightarrow \mathbf{A_s = 108 \text{ m}^2}$$

Gabarito: LETRA D.

Por fim, também devemos saber como calculamos o seu volume. Anote aí o volume da esfera:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$



(MARINHA/2023) Qual o volume de uma esfera cujo diâmetro mede 6 dm? (utilize $\pi=3,1$)

- A) 37,20 dm³
- B) 111,6 dm³
- C) 487,1 dm³
- D) 519,0 dm³
- E) 892,8 dm³

Comentários:

Questão apenas para **treinar a fórmula do volume!**

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Como o diâmetro mede 6 dm, podemos concluir que **o raio é igual a 3 dm**. Sendo assim:

$$V = \frac{4 \cdot 3,1 \cdot 3^3}{3}$$

$$V = 12,4 \cdot 9$$

$$\mathbf{V = 111,6 \text{ dm}^3}$$

Gabarito: LETRA A.



Inscrição e Circunscrição de Sólidos

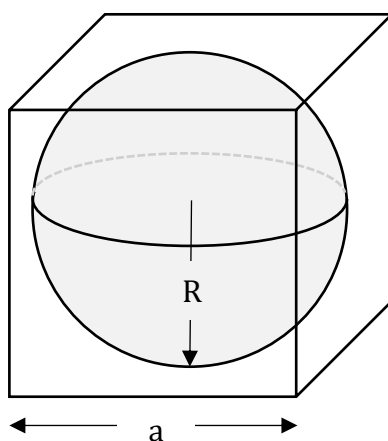
Introdução

Agora, vamos aplicar tudo que vimos anteriormente para resolver o problema da inscrição e circunscrição de sólidos. Você deve lembrar que na aula de Geometria Plana vimos algo semelhante para os polígonos, não é mesmo? Quando falamos que um sólido está inscrito em outro, significa que ele está dentro desse outro sólido, **tangenciando as suas faces**. Por sua vez, o sólido externo encontra-se circunscrito.

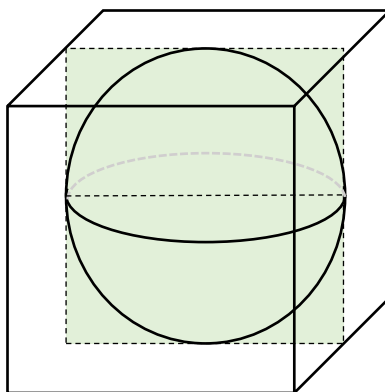
Dada a infinidade de sólidos geométricos que existem, **as possibilidades de inscrição e circunscrição são infinitas**. Sendo assim, selecionei apenas aquelas mais comuns nas provas para tratar nesse tópico. Por fim, a esfera será nossa "atriz principal", então é bom estar bem familiarizado com ela.

Esfera inscrita no cubo

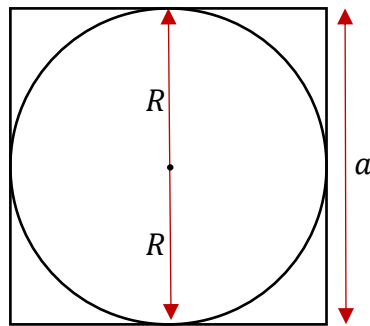
Quando a esfera está **inscrita** no cubo, temos que ela está **dentro** do cubo. O detalhe mais importante é que ela tangencia todas as faces do cubo. Observe como esquematizamos a situação.



Nosso maior objetivo é **relacionar o raio da esfera (R) com alguma dimensão do sólido**, no caso em tela, a aresta do cubo. Para isso, a melhor estratégia é fazermos um "corte" e observar a seção formada.



Observando a seção formada pelo corte, temos:



Note que **o lado do cubo tem o mesmo comprimento do diâmetro da esfera**. É o que devemos guardar!

TOME NOTA!

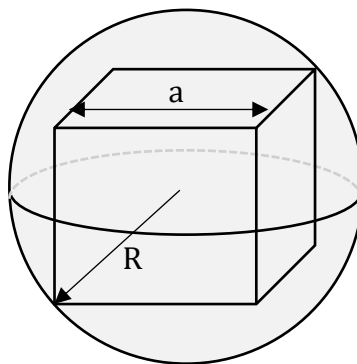


Na esfera inscrita no cubo, o diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo.

$$2R = a$$

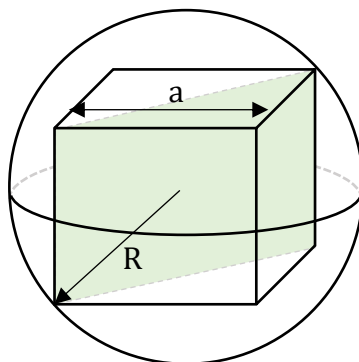
Esfera circunscrita ao cubo

Dessa vez, a esfera está por fora do cubo. Os vértices do cubo tangenciam a esfera internamente.

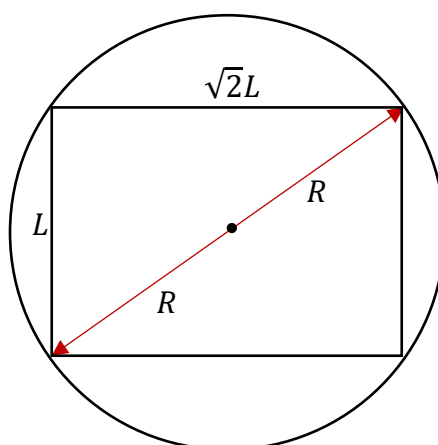


Nosso objetivo aqui é o mesmo, **relacionar o raio da esfera com a aresta do cubo**. Assim, a estratégia será a mesma também: fazer um corte transversal de modo a evidenciar essas dimensões no plano.





O corte mais interessante deve ser feito de tal forma que os vértices do cubo estejam incluídos bem com as diagonais das faces. Observe como fica o corte:



Perceba que **o diâmetro da esfera coincide com a diagonal do cubo**. Esse é o nosso principal resultado.

TOME NOTA!



Na esfera inscrita no cubo, o diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo.

$$2R = \sqrt{3}a$$

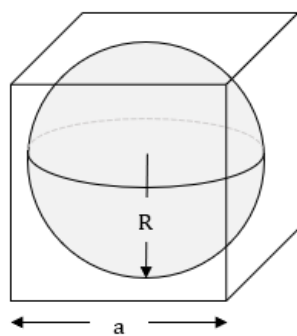
HORA DE PRATICAR!



(INÉDITA/2023) Considere uma esfera de área superficial igual a $36\pi \text{ cm}^2$ que está inscrita em um cubo. Assinale a alternativa que contém a área superficial do cubo.

- A) 18 cm^2
- B) 36 cm^2
- C) 81 cm^2
- D) 108 cm^2
- E) 72 cm^2

Comentários:



Como a questão deu a área superficial, podemos encontrar **o raio da esfera**.

$$A_s = 4\pi R^2 \rightarrow 4\pi R^2 = 36\pi \rightarrow R^2 = 9$$

$$R = 3 \text{ cm}$$

Ora, como a esfera está inscrita no cubo, temos que **o diâmetro é igual a aresta do cubo**. Sendo assim:

$$a = 2R \rightarrow a = 2 \cdot 3 \rightarrow a = 6 \text{ cm}$$

Com a aresta do cubo, podemos encontrar a sua **área superficial**:

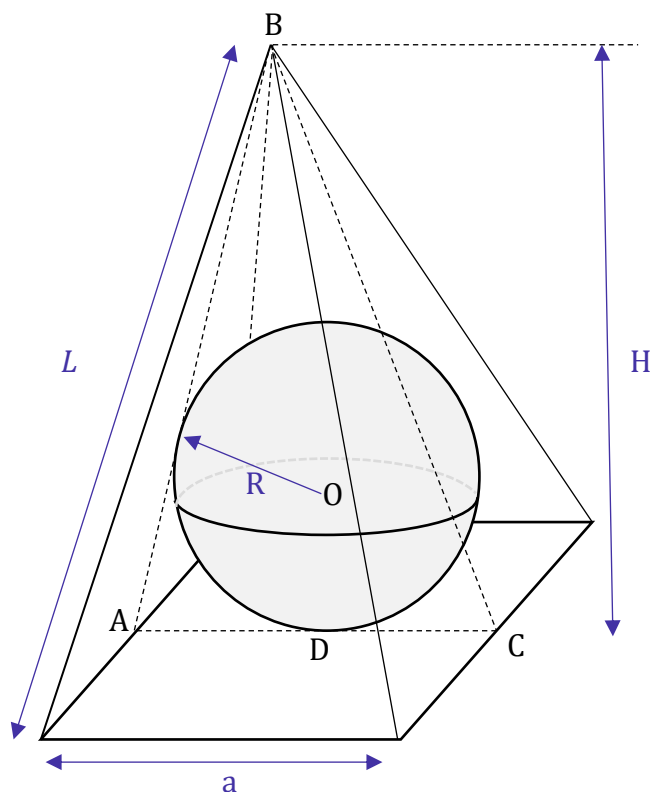
$$A_{s,cubo} = 6a^2 \rightarrow A_{s,cubo} = 6 \cdot 6^2 \rightarrow \boxed{A_{s,cubo} = 108 \text{ cm}^2}$$

Gabarito: LETRA D.

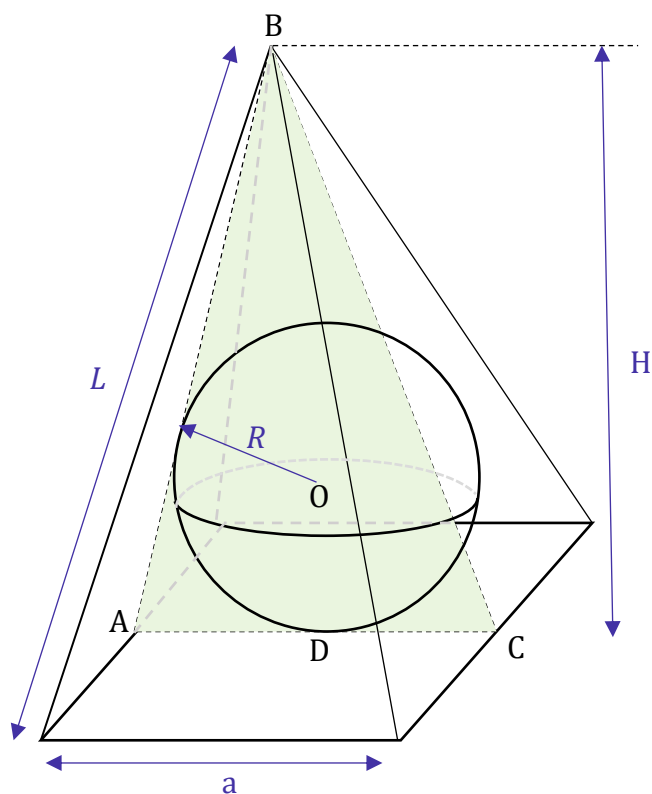
Esfera inscrita na pirâmide

Uma esfera também pode estar inscrita em uma pirâmide. Para hoje, trabalharemos com uma pirâmide de base quadrada, mas **poderia ser uma base pentagonal, hexagonal...** O raciocínio que desenvolveremos é passível de ser aplicado a todos esses casos, tudo bem? Observe a situação abaixo.

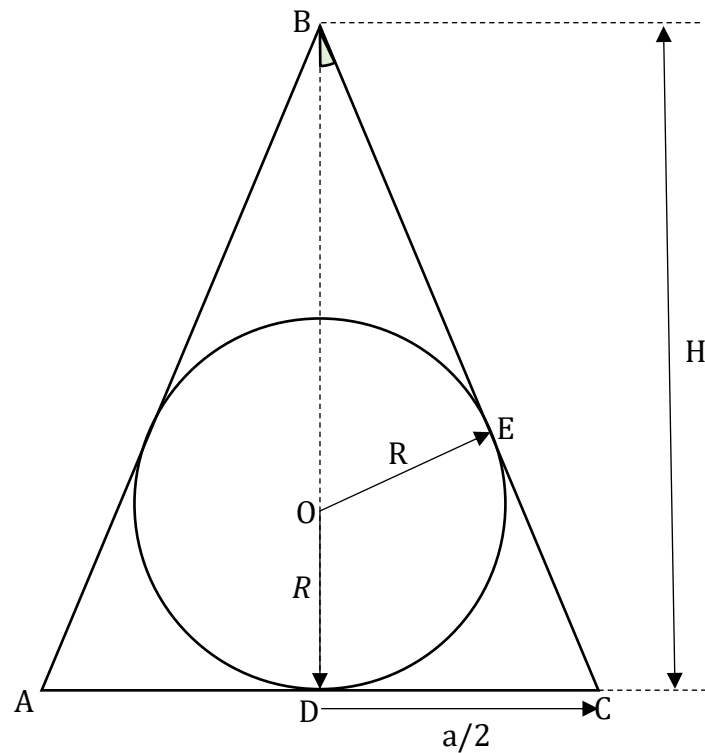




Parece um pouco mais complicado, não é verdade? " H " é a altura da pirâmide, " L " é a aresta lateral, " a " é a aresta da base e " R " é o raio da esfera. O corte que faremos deverá conter o triângulo ABC pois é um corte que engloba os pontos onde a esfera tangencia as faces triangulares.



Quando destacamos essa seção, temos o seguinte resultado:



Para relacionarmos as dimensões, podemos usar **a semelhança entre os triângulos BOE e BDC**.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}$$

Observe que $\overline{BC}$ pode ser determinada usando **Teorema de Pitágoras** no triângulo BDC.

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Na semelhança de triângulos, ficamos com:

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}$$

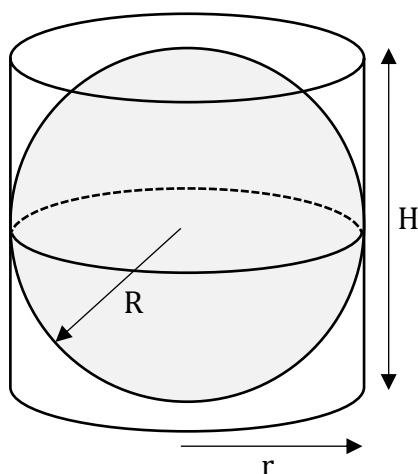


$$\frac{R}{\frac{a}{2}} = \frac{H - R}{\sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

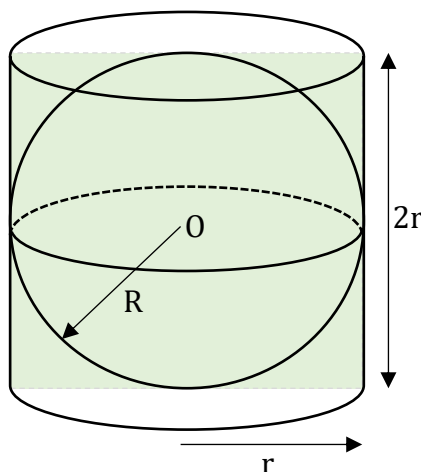
Pessoal, **essa não é uma expressão para ser decorada**. O objetivo aqui é apenas mostrar o raciocínio a ser desenvolvido caso uma questão como essa apareça em sua prova. Busque sempre o corte transversal que traga mais informações e, depois, tente encontrar uma semelhança de triângulos. Para um exemplo de aplicação, observe a **questão 10** da nossa lista de exercícios!

Esfera inscrita no cilindro equilátero

Esse é um dos casos mais simples. Observe como desenhamos a situação.

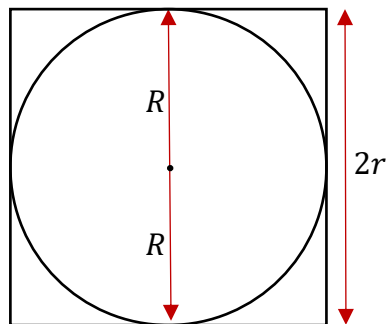


Nesse caso, a esfera tangencia a superfície lateral do cilindro bem como o centro das bases. É importante lembrar que **um cilindro equilátero é aquele que possui altura igual ao diâmetro da base**. Agora, vamos fazer aquele corte para observarmos com mais atenção as dimensões envolvidas.



Quando visualizamos a seção transversal destacada pelo corte, temos:





Note que o diâmetro da esfera é igual ao diâmetro da base (que, por sua vez, é igual a altura do cilindro). Logo, os raios também são iguais.

TOME NOTA!

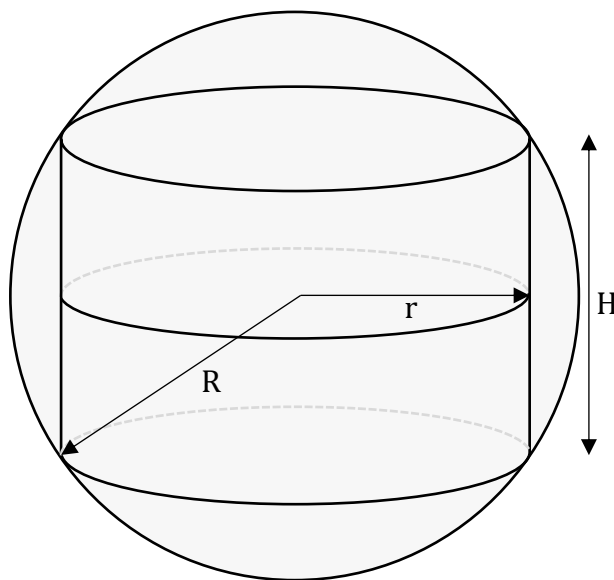


Na esfera inscrita no cilindro equilátero, o raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro. Assim, seja “R” o raio da esfera e “r” o raio da base do cilindro, temos:

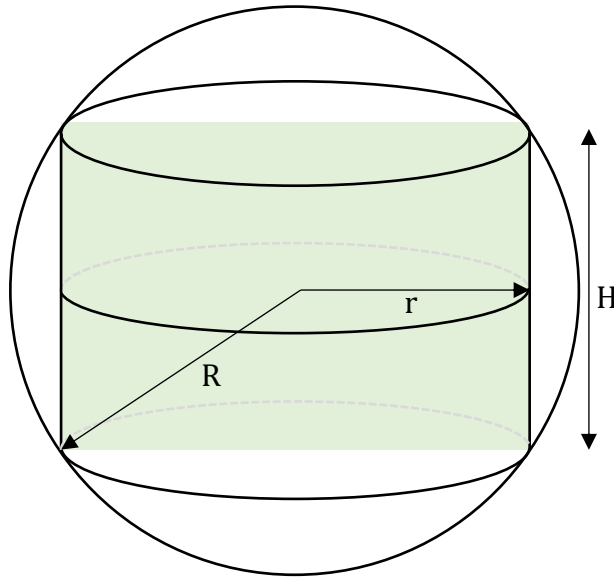
$$R = r$$

Esfera circunscrita ao cilindro

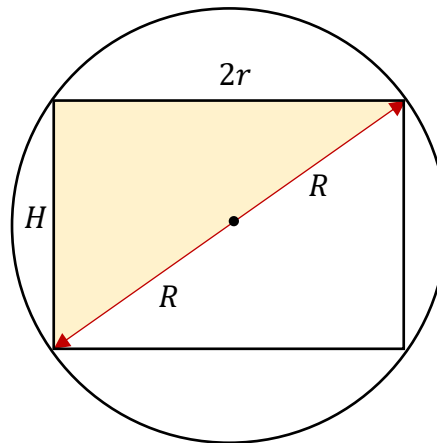
Nesse caso, a esfera está externa ao cilindro conforme o seguinte desenho.



Vamos fazer um corte que pegue ao mesmo tempo o diâmetro da base do cilindro e o diâmetro da esfera.



Quando visualizamos esse corte mais atentamente, obtemos:



Note o triângulo retângulo destacado. Para relacionarmos as dimensões, podemos usar Pitágoras.

$$(2R)^2 = (2r)^2 + H^2$$

$$4R^2 = 4r^2 + H^2$$

$$R = \frac{\sqrt{4r^2 + H^2}}{2}$$

Pessoal, essa é uma outra expressão que não precisa ser decorada. O nosso esforço aqui deve ser no entendimento do problema para que, na hora da prova, vocês rapidamente consigam desenrolar.

HORA DE PRATICAR!

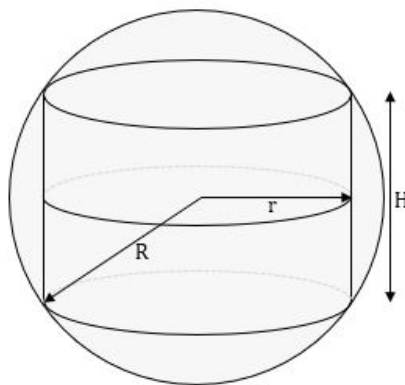


(INÉDITA/2023) Considere um cilindro com volume igual a $125\pi \text{ cm}^3$ que está inscrito em uma esfera. Se a altura desse cilindro é igual a 5 cm, assinale a alternativa que contém o volume da esfera.

- A) $625\pi\sqrt{5}/6$
- B) $125\pi\sqrt{5}/12$
- C) $75\pi\sqrt{3}/6$
- D) $625\pi\sqrt{2}/6$
- E) $125\pi\sqrt{2}/12$

Comentários:

Note que o cilindro está inscrito na esfera. Isso é o mesmo que dizer que a esfera está circunscrita ao cilindro. Tudo bem? Sendo assim, vamos desenhar a situação.



Como temos o volume a altura do cilindro, podemos encontrar o raio da base "r".

$$V_{cilindro} = \pi r^2 H$$

$$\pi r^2 \cdot 5 = 125\pi$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

Ora, com o raio da base e a altura, podemos encontrar o raio da esfera por meio da expressão que chegamos na teoria:



$$R = \frac{\sqrt{4r^2 + H^2}}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{4 \cdot 5^2 + 5^2}}{2}$$

$$R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

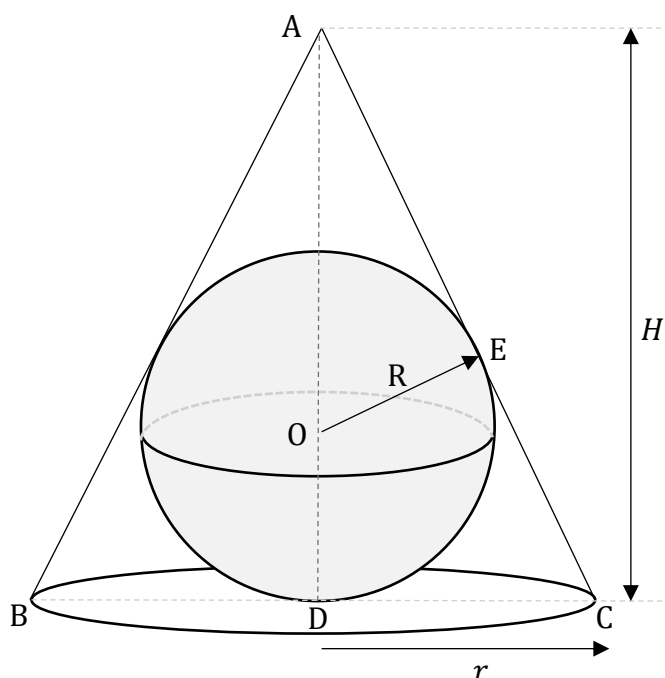
Pronto! Com o raio da esfera, calculamos o seu volume.

$$V_e = \frac{4\pi R^3}{3} \rightarrow V_e = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{5\sqrt{5}}{2} \right)^3 \rightarrow V_e = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{625\sqrt{5}}{8} \rightarrow \boxed{V_e = \frac{625\pi\sqrt{5}}{6}}$$

Gabarito: LETRA A.

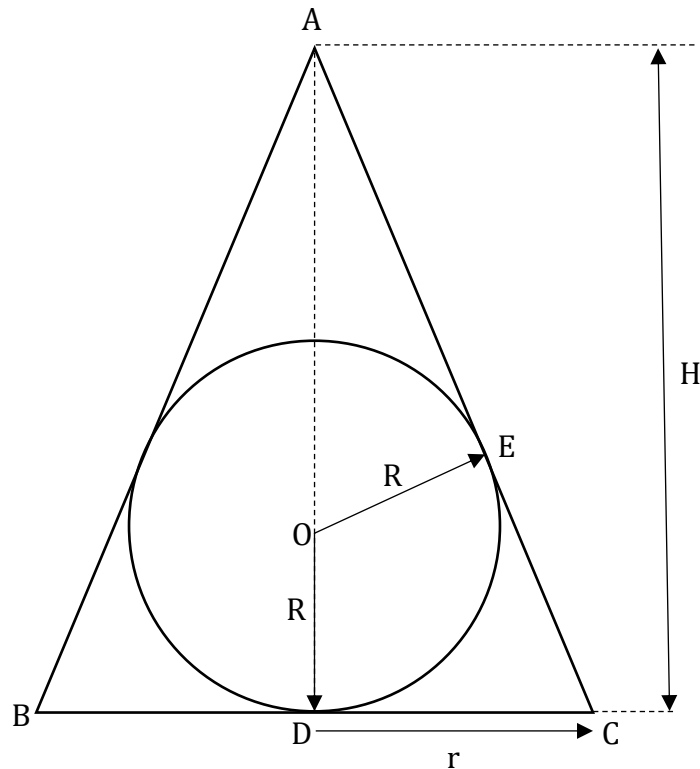
Esfera inscrita no cone

Quando temos uma esfera inscrita no cone, devemos visualizar algo semelhante a figura abaixo:



Da mesma forma que fizemos anteriormente, vamos passar um plano que contenha o vértice do cone, o centro da esfera e o centro da base. O resultado desse corte é mostrado no desenho a seguir:





Trata-se de uma situação em que precisaremos usar a **semelhança de triângulos**. Note que o triângulo AOE é semelhante ao triângulo ADC. Dessa forma, podemos escrever:

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}$$

Substituímos o que temos:

$$\frac{R}{r} = \frac{H - R}{\sqrt{r^2 + H^2}}$$

Vamos treinar como poderia ser uma cobrança desse tema (ver também a **questão 8** da nossa lista).

HORA DE PRATICAR!



(INÉDITA/2023) Considere uma esfera que está inscrita em um cone reto de altura igual a 8 cm e raio da base 6 cm. Assinale a alternativa que contém o volume no interior do cone que não está ocupado pela esfera.

A) $20\pi \text{ cm}^3$

B) $40\pi \text{ cm}^3$



- C) $60\pi \text{ cm}^3$
- D) $80\pi \text{ cm}^3$
- E) $100\pi \text{ cm}^3$

Comentários:

É a situação estudada anteriormente. Temos uma esfera inscrita no cone.

Como queremos o volume no interior do cone que **não está ocupado pela esfera**, devemos fazer:

$$V = V_{\text{cone}} - V_{\text{esfera}}$$

$$V = \frac{\pi r^2 H}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$$

Observe que o enunciado forneceu **o raio da base do cone e a altura**.

$$r = 6 \text{ cm}$$

$$H = 8 \text{ cm}$$

Para matarmos o problema, falta apenas **determinar o raio da esfera**. Para isso, podemos usar a expressão que deduzimos.

$$\frac{R}{r} = \frac{H - R}{\sqrt{r^2 + H^2}}$$

Substituindo o que temos:

$$\frac{R}{6} = \frac{8 - R}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$\frac{R}{6} = \frac{8 - R}{10}$$

$$10R = 48 - 6R$$

$$16R = 48$$

$$R = 3 \text{ cm}$$

Pronto! Vamos encontrar o volume procurado:



$$V = \frac{\pi 6^2 8}{3} - \frac{4\pi 3^3}{3}$$

$$V = \frac{288\pi}{3} - \frac{108\pi}{3}$$

$$V = \frac{180\pi}{3}$$

$$\boxed{V = 60\pi}$$

Gabarito: LETRA C.

Pessoal, como falei anteriormente, temos uma gama de situações que envolvem a inscrição e circunscrição de sólidos. São infinitas as possibilidades. Podemos ter prisma inscrito em cilindros, cones em cubos, pirâmides em cilindros... Todas essas situações são resolvidas por meio do raciocínio que aprendemos hoje. Treine com a lista a seguir que tenho certeza de que ficará bem-preparado para sua prova!



QUESTÕES COMENTADAS

Introdução

Vunesp

1. (VUNESP/PREF. PRES. PRUDENTE/2022) A diferença entre as medidas de dois ângulos complementares é de $22^{\circ}44'$. A bissetriz do menor desses ângulos o divide em outros dois ângulos, cada um deles com medida de

- A) $14^{\circ}23'$
- B) $15^{\circ}17'$
- C) $15^{\circ}27'$
- D) $16^{\circ}49'$
- E) $16^{\circ}59'$

Comentários:

Para resolver esse exercício, precisamos saber a relação entre grau, minutos e segundos. Guarde que 1 grau tem 60 minutos e que 1 minuto tem 60 segundos. Dessa forma, podemos escrever:

$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

Para representar os minutos, usamos a plica simples ('). Por sua vez, os segundos são representados por uma plica dupla ("). Muito cuidado para não confundir, pessoal. O "minuto" e o "segundo" que estamos vendo aqui não se referem a unidade de tempo. Na verdade, no contexto da aula de hoje, são unidades de medida angular. Dito isso, vamos para a questão propriamente dita.

O enunciado afirma que temos dois ângulos complementares. Vamos chamá-los de "x" e de "y".

$$x + y = 90^{\circ} \quad (1)$$

Lembre-se que dois ângulos são complementares quando sua soma é igual a 90° .

Por sua vez, o enunciado afirma que a diferença entre esses dois ângulos é igual a $22^{\circ}44'$.



Observe que temos um ângulo expresso em graus e em minutos. Na teoria, nós resolvemos uma questão em que trabalhamos com todas as unidades simultaneamente. Dessa vez, para apresentar-lhes uma outra forma de solução, **transformaremos tudo em uma unidade só**.

Inicialmente, vamos determinar quantos graus equivalem 44'. Para isso, basta dividir 44 por 60 (faça a regra de três: se 1 grau está para 60', então x graus está para 44').

$$\frac{44}{60} = 0,733...$$

Sendo assim, podemos escrever que:

$$44' = 0,73^\circ$$

Mais ainda:

$$22^\circ 44' = 22,73^\circ$$

Pronto, agora que temos tudo em graus, escrevemos:

$$x - y = 22,73^\circ \quad (2)$$

Temos um sistema formado pelas equações (1) e (2). Para resolvê-lo, podemos somar as duas equações.

$$(x + y) + (x - y) = 90^\circ + 22,73^\circ$$

$$2x = 112,73^\circ$$

$$x = 56,365^\circ$$

Devemos usar o valor de "x" em (1) ou (2) para determinarmos "y".

$$56,365^\circ + y = 90^\circ$$

$$y = 90^\circ - 56,365^\circ$$

$$y = 33,635^\circ$$



Agora, perceba que a questão fala que existe uma bissetriz que divide esse ângulo em dois. Ora, **uma bissetriz divide o ângulo em duas partes iguais**. Sendo assim, devemos dividir "y" por 2.

$$r = \frac{33,635^\circ}{2}$$

$$r = 16,81^\circ$$

No entanto, observe que as alternativas estão com as respostas em graus e minutos. Precisaremos transformar a parte decimal em minutos. Como dessa vez faremos **caminho inverso**, multiplicaremos por 60.

$$0,81 \cdot 60 = 48,6$$

Com isso:

$$0,81^\circ = 48,6' \cong 49'$$

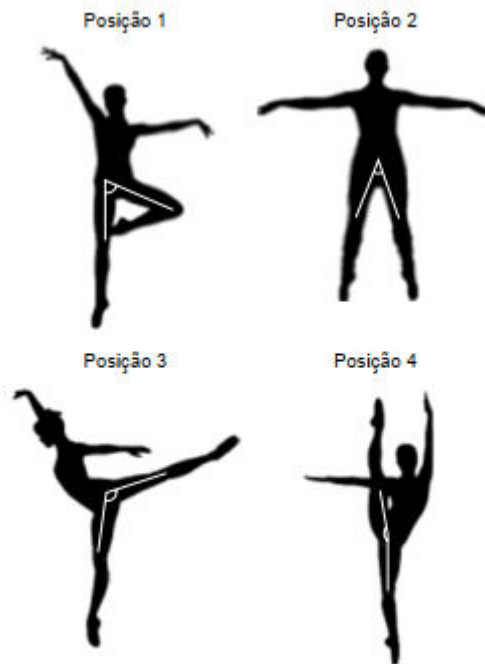
Nossa resposta fica:

$$16,81^\circ = 16^\circ 49'$$

Gabarito: LETRA D.

2. (VUNESP/PREF. F. VASCONCELOS/2018) As imagens a seguir apresentam algumas posições de dança. Destacado em branco está o ângulo correto das pernas para execução da posição.



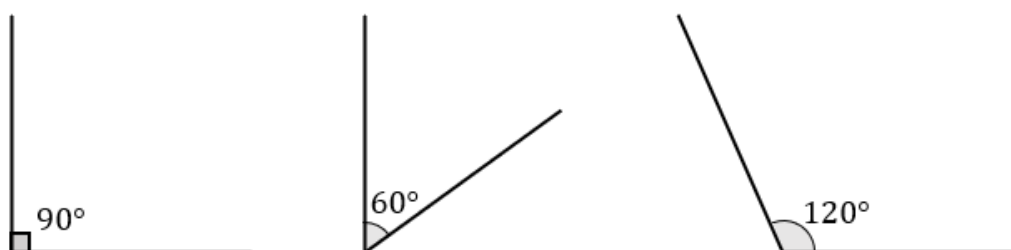


Dentre as posições apresentadas, as duas em que a angulação das pernas é superior à de um ângulo reto são as posições

- A) 1 e 2.
- B) 1 e 3.
- C) 2 e 3.
- D) 2 e 4.
- E) 3 e 4.

Comentários:

Pessoal, um ângulo reto é um ângulo de 90° . Como o enunciado pede as posições em que a angulação das pernas seja superior a 90° , estamos falando das posições de número 3 e de número 4. Observe a seguinte imagem para uma referência:



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM GRAUS ($^\circ$)

Portanto, as posições 1 e 2 indicam ângulos agudos (menores que 90°), enquanto as posições 3 e 4 indicam ângulos obtusos (maiores que 90°).

Gabarito: LETRA E.

3. (VUNESP/SAP-SP/2013) Um arquiteto, em um de seus projetos, fez algumas medições e dentre elas mediu dois ângulos complementares. Um desses ângulos mediu 65° e o outro,

- A) 115° .
- B) 90° .
- C) 180° .
- D) 25° .
- E) 60° .

Comentários:

Ora, **dois são ângulos são complementares quando sua soma é igual a 90°** . Como um desses ângulos é 65° , podemos encontrar o outro por meio da seguinte equação:

$$65^\circ + x = 90^\circ$$

$$x = 90^\circ - 65^\circ$$

$$x = 25^\circ$$

Gabarito: LETRA D.

4. (VUNESP/FAPESP/2012) Sobre as medidas m e n , respectivamente dos ângulos $\hat{M}$ e $\hat{N}$, sabe-se o seguinte: a soma delas é equivalente à medida de um ângulo raso e a diferença entre elas é equivalente à medida de um ângulo reto. Supondo-se o ângulo $\hat{M}$ com a maior medida, uma possível relação entre m e n é

- A) $m = 2n$.
- B) $m = 3n$.
- C) $m = 4n$.
- D) $m = 5n$.
- E) $m = 6n$.

Comentários:

Vamos lá! A soma de dois ângulos m e n é igual a medida de um **ângulo raso (180°)**. Com isso, escrevemos:

$$m + n = 180^\circ \quad (1)$$

Ademais, a diferença entre eles é igual a medida de um **ângulo reto (90°)**.



$$m - n = 90^\circ \quad (2)$$

Temos um sistema com duas equações e duas incógnitas. Para resolvê-lo, podemos somar as equações.

$$(m + n) + (m - n) = 180^\circ + 90^\circ$$

$$2m = 270^\circ$$

$$m = 135^\circ$$

Pronto! Com o valor de "m", encontramos "n".

$$135^\circ + n = 180^\circ$$

$$n = 180^\circ - 135^\circ$$

$$n = 45^\circ$$

Beleza! Para determinarmos uma relação entre "m" e "n", podemos dividir "m" por "n".

$$\frac{m}{n} = \frac{135}{45}$$

$$\frac{m}{n} = 3$$

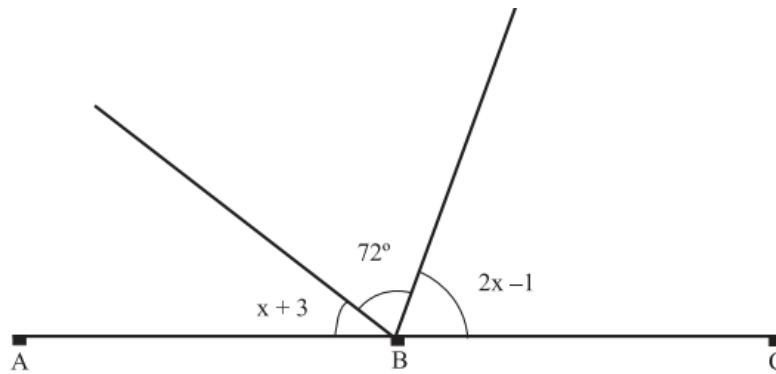
$$m = 3n$$

Com isso, podemos marcar a alternativa B.

Gabarito: LETRA B.

5. (VUNESP/SPPREV/2009) Na figura, os pontos A, B e C são colineares e B é vértice comum dos três ângulos em destaque.





Sabendo-se que as medidas desses ângulos estão indicadas em graus, conclui-se que o valor de x é igual a

- A) 30° .
- B) 32° .
- C) $35^\circ 20'$.
- D) $35^\circ 33'$.
- E) 36° .

Comentários:

Como A, B e C são colineares (estão sobre uma mesma reta), o ângulo formado por eles é um ângulo raso, ou seja, de 180° . Ao somar os ângulos destacados na imagem, devemos obter exatamente esse valor.

$$(x + 3) + 72^\circ + (2x - 1) = 180^\circ$$

$$3x + 74^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 106^\circ$$

$$x = 35,33^\circ$$

Observe que nenhuma das alternativas contempla esse valor. O motivo disso é que a resposta procurada está expressa em graus ($^\circ$) e em minutos ($'$). Sendo assim, transformamos o "x" multiplicando a parte decimal 0,33 por 60.

$$0,33 \cdot 60 = 20$$

Logo,

$$0,33^\circ = 20'$$



Dito isso, podemos escrever:

$$x = 35,33^\circ = 35^\circ 20'$$

Nossa resposta é a alternativa C.

Gabarito: LETRA C.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

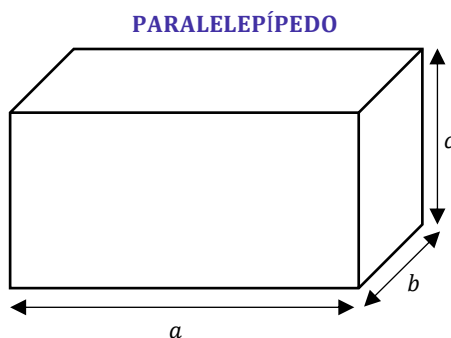
Prisma

1. (VUNESP/PREF. MARÍLIA/2023) O comprimento de um paralelepípedo reto-retângulo excede sua profundidade em 4 cm. Se a altura desse paralelepípedo é 7 cm, e sua área total é 344 cm^2 , seu volume, em cm^3 , é

- A) 350.
- B) 420.
- C) 490.
- D) 560.
- E) 630.

Comentários:

Sejam "a", "b" e "c" as dimensões do paralelepípedo.



Como o comprimento excede sua profundidade em 4 cm, podemos escrever:

$$a = b + 4$$

Por sua vez, a altura desse paralelepípedo é 7 cm. Portanto:

$$c = 7$$

Na teoria, vimos que a área total de um paralelepípedo pode ser escrita como:

$$A_{total} = 2 \cdot (ac + bc + ab)$$

Como o enunciado falou que a área total do prisma em questão é 344 cm^2 , vamos substituir todas essas informações no enunciado para encontrarmos "b".



$$2 \cdot [(b + 4) \cdot 7 + b \cdot 7 + (b + 4) \cdot b] = 344$$

$$[7b + 28 + 7b + b^2 + 4b] = 172$$

$$b^2 + 18b - 144 = 0$$

Opa! Uma equação de segundo grau. Vamos usar Bhaskara para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad \rightarrow \quad \Delta = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-144) \quad \rightarrow \quad \Delta = 324 + 576 \quad \rightarrow \quad \Delta = 900$$

- Cálculo das Raízes

$$b = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \quad \rightarrow \quad b = \frac{-18 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad b = \frac{-18 \pm 30}{2}$$

$$b' = \frac{-18 + 30}{2} \quad \rightarrow \quad b' = \frac{12}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{b' = 6}$$

$$b'' = \frac{-18 - 30}{2} \quad \rightarrow \quad b'' = \frac{-48}{2} \quad \rightarrow \quad b'' = -24$$

Pronto! Como estamos trabalhando com dimensões de um sólido, somente a raiz positiva tem significado para nós. Com o valor de "b", podemos encontrar o "a":

$$a = b + 4 \quad \rightarrow \quad a = 6 + 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 10}$$

Agora que **temos as três dimensões** do paralelepípedo, podemos calcular o seu volume:

$$V = abc$$

$$V = 10 \cdot 6 \cdot 7$$

$$\boxed{V = 420 \text{ cm}^3}$$

Gabarito: LETRA B.

2. (VUNESP/PM-SP/2023) Um objeto feito em madeira maciça tem o formato de prisma reto com base no formato de losango, cujas diagonais medem 5 cm e 6 cm. Se o volume de madeira contido nesse objeto é de 450 cm³, então sua altura, comparada à medida da maior diagonal da sua base, é maior em



- A) 28 cm.
- B) 24 cm.
- C) 27 cm.
- D) 26 cm.
- E) 25 cm.

Comentários:

O volume de um prisma pode ser calculado como:

$$V = A_b H$$

De acordo com o enunciado, **a base desse prisma é um losango**. Sendo assim, sua área é dada por:

$$A_b = \frac{Dd}{2}$$

Como **as diagonais desse losango medem 5 cm e 6 cm**, podemos substituir:

$$A_b = \frac{5 \cdot 6}{2} \quad \rightarrow \quad A_b = \frac{30}{2} \quad \rightarrow \quad A_b = 15 \text{ cm}^2$$

Como temos o volume e a área da base, podemos encontrar a altura desse prisma.

$$450 = 15H$$

$$H = \frac{450}{15}$$

$$\boxed{H = 30 \text{ cm}}$$

Observe que a diagonal maior mede 6 cm enquanto a altura mede 30 cm. Logo, a altura é **24 cm maior** do que a maior diagonal do losango.

Gabarito: LETRA B.

3. (VUNESP/PREF. ARAÇATUBA/2023) Um objeto em madeira maciça tem o formato de prisma reto, com base triangular. A altura desse objeto é de 15 cm e seu volume é de 120 cm³. Sabendo-se que a base desse objeto tem o formato de um triângulo retângulo isósceles, as arestas da base que formam o ângulo reto medem

- A) 6,0 cm.
- B) 5,5 cm.



- C) 5,0 cm.
- D) 4,5 cm.
- E) 4,0 cm.

Comentários:

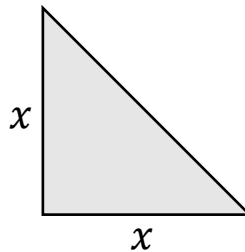
Com a altura e o volume desse prisma reto, podemos encontrar a **área da base**.

$$V = A_b H$$

$$120 = 15A_b$$

$$A_b = 8 \text{ cm}^2$$

O enunciado afirma que a base é um **triângulo retângulo isósceles**, ou seja, algo na forma:

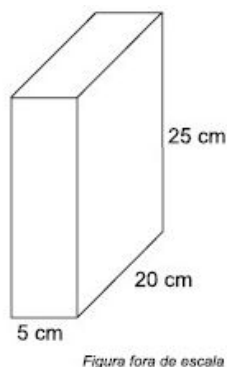


Sendo assim, podemos encontrar "x" por meio da área da base.

$$A_b = \frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{x^2}{2} = 8 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow \boxed{x = 4}$$

Gabarito: LETRA E.

4. (VUNESP/PREF. OSASCO/2022) Uma caixa de papelão, na forma de um prisma reto de base retangular, tem suas medidas indicadas na figura.



Essa caixa está com $\frac{3}{5}$ de sua capacidade total preenchida com sabão em pó. Se todo esse sabão for dividido em porções de 125 cm^3 cada uma, o número de porções obtidas será

- A) 8
- B) 12
- C) 15
- D) 18
- E) 20

Comentários:

O primeiro passo é calcularmos **o volume dessa caixa**. Como se trata de um paralelepípedo, seu volume é calculado pelo produto das dimensões destacadas na imagem.

$$V = 5 \cdot 20 \cdot 25 \rightarrow V = 2500 \text{ cm}^3$$

No entanto, esse volume não está todo preenchido, apenas **$\frac{3}{5}$ dele**. Assim,

$$V_p = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot 2500 \rightarrow V_p = 1500 \text{ cm}^3$$

Esse é o volume da caixa preenchida com sabão. Como **cada porção tem 125 cm^3** , então o número de porções é dado pela razão do volume preenchido por 125.

$$n = \frac{1500}{125} \rightarrow n = 12$$

Gabarito: LETRA B.

5. (VUNESP/PM-SP/2022) Um paralelepípedo reto-retângulo tem uma de suas faces de maior área apoiada sobre o chão, e, dessa maneira, sua área lateral é 200 cm^2 . Se esse paralelepípedo tivesse uma das faces de menor área apoiada sobre o chão, a área lateral seria 312 cm^2 . Sabendo que a área total do paralelepípedo é 392 cm^2 , sua maior aresta mede

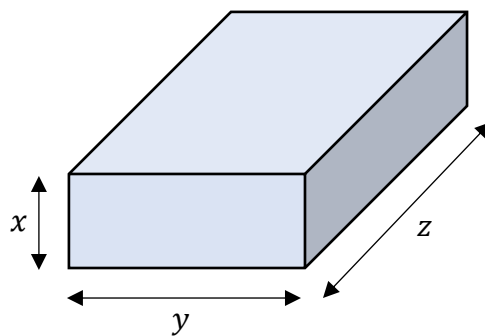
- A) 21 cm.
- B) 20 cm.
- C) 15 cm.
- D) 14 cm.
- E) 12 cm.

Comentários:

Questão bem interessante, moçada! Vamos desenhar um pouco.

- 1) Paralelepípedo com a face de maior área apoiada no chão.





Note que nessa situação a área lateral é dada por:

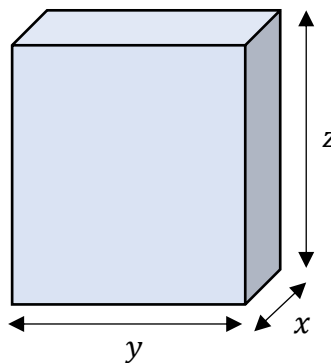
$$A_l = xy + xy + xz + xz \rightarrow A_l = 2xy + 2xz$$

De acordo com o enunciado, **essa área vale 200 cm².**

$$2xy + 2xz = 200 \rightarrow xy + xz = 100 \quad (1)$$

Vamos guardar essa relação.

2) Paralelepípedo com a face de menor área apoiada no chão.



Com o paralelepípedo dessa forma, a área lateral é dada por:

$$A_l = yz + yz + xz + xz \rightarrow A_l = 2yz + 2xz$$

A questão também informou **o valor dessa área, que é 312 cm².**

$$2yz + 2xz = 312 \rightarrow yz + xz = 156 \quad (2)$$

Por fim, temos que **a área total desse paralelepípedo é 392 cm².** Logo,

$$2 \cdot (xy + yz + xz) = 392 \rightarrow xy + yz + xz = 196 \quad (3)$$



Note que temos **três equações e três incógnitas**. Vamos tentar resolvê-las.

Usando (2) em (3), ficamos com:

$$xy + 156 = 196 \rightarrow xy = 40 \quad (4)$$

Usando esse resultado em (1):

$$40 + xz = 100 \rightarrow xz = 60 \quad (5)$$

Usando (5) em (2):

$$yz + 60 = 156 \rightarrow yz = 96 \quad (6)$$

Agora, vamos dividir (5) por (4).

$$\frac{xz}{xy} = \frac{60}{40} \rightarrow \frac{z}{y} = \frac{3}{2} \rightarrow z = \frac{3y}{2} \quad (7)$$

Substituindo (7) em (6):

$$y \cdot \left(\frac{3y}{2}\right) = 96 \rightarrow y^2 = 64 \rightarrow y = \sqrt{64} \rightarrow \boxed{y = 8 \text{ cm}}$$

Usando esse resultado em (7):

$$z = \frac{3 \cdot 8}{2} \rightarrow \boxed{z = 12 \text{ cm}}$$

Agora, falta apenas determinarmos "x". Podemos usar o valor de "z" em (5):

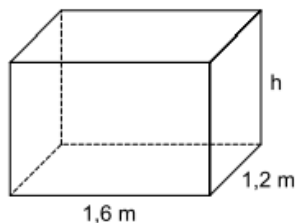
$$x \cdot 12 = 60 \rightarrow x = \frac{60}{12} \rightarrow \boxed{x = 5 \text{ cm}}$$

Note que **a maior das arestas mede 12 cm**.

Gabarito: LETRA E.

6. (VUNESP/TJ-SP/2018) Um estabelecimento comercial possui quatro reservatórios de água, sendo três deles de formato cúbico, cujas respectivas arestas têm medidas distintas, em metros, e um com a forma de um paralelepípedo reto retângulo, conforme ilustrado a seguir.





Sabe-se que, quando totalmente cheios, a média aritmética dos volumes de água dos quatro reservatórios é igual a $1,53 \text{ m}^3$, e que a média aritmética dos volumes de água dos reservatórios cúbicos, somente, é igual a $1,08 \text{ m}^3$. Desse modo, é correto afirmar que a medida da altura do reservatório com a forma de bloco retangular, indicada por h na figura, é igual a

- A) 1,40 m.
- B) 1,50 m.
- C) 1,35 m.
- D) 1,45 m.
- E) 1,55 m.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das informações do enunciado.

- A **média aritmética** dos volumes de água dos quatro reservatórios é igual a $1,53 \text{ m}^3$. Assim,

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} = 1,53 \quad \rightarrow \quad V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 6,12 \text{ m}^3 \quad (1)$$

- A **média aritmética** dos volumes de água dos reservatórios cúbicos, somente, é igual a $1,08 \text{ m}^3$.

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3}{3} = 1,08 \quad \rightarrow \quad V_1 + V_2 + V_3 = 3,24 \text{ m}^3 \quad (2)$$

- Comparando (1) e (2), conseguimos tirar que:

$$3,24 + V_4 = 6,12 \quad \rightarrow \quad V_4 = 6,12 - 3,24 \quad \rightarrow \quad V_4 = 2,88 \text{ m}^3$$

Logo, **o volume do bloco retangular é $2,88 \text{ m}^3$** ! Olhando para a figura do enunciado, conseguimos também calcular a área da base:

$$A_b = 1,6 \cdot 1,2 \quad \rightarrow \quad A_b = 1,92 \text{ m}^2$$

Com isso, lembre-se que **o volume de um paralelepípedo** é dado por:

$$V = A_b h$$

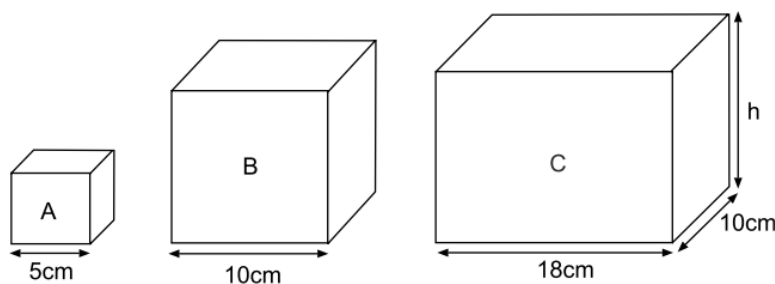


Substituindo os valores que já encontramos na expressão acima:

$$2,88 = 1,92h \rightarrow h = \frac{2,88}{1,92} \rightarrow h = 1,5 \text{ m}$$

Gabarito: LETRA B.

7. (VUNESP/TJ-SP/2017) As figuras seguintes mostram os blocos de madeira A, B e C, sendo A e B de formato cúbico e C com formato de paralelepípedo reto retângulo, cujos respectivos volumes, em cm^3 , são representados por V_A , V_B e V_C .

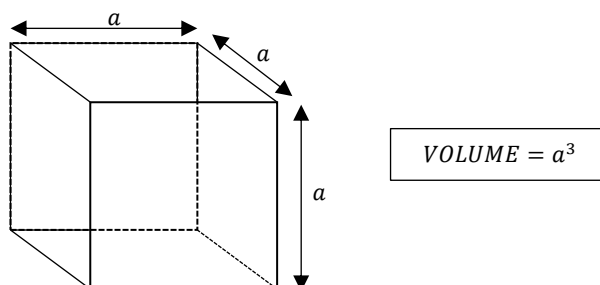


Se $V_A + V_B = \frac{1}{2}V_C$, então a medida da altura do bloco C, indicada por h na figura, é, em centímetros, igual a

- A) 12,5
- B) 15,5
- C) 14
- D) 16
- E) 11

Comentários:

Os blocos A e B são cubos. **O volume de um cubo é o valor da aresta elevado a 3.**



Como **temos as arestas dos dois cubos**, podemos calcular os respectivos volumes.



$$V_A = 5^3 \rightarrow V_A = 125 \text{ cm}^3$$

$$V_B = 10^3 \rightarrow V_B = 1000 \text{ cm}^3$$

Ademais, o enunciado disse que $V_A + V_B = \frac{1}{2} V_C$. Logo, podemos substituir os volumes encontramos acima e determinar V_C .

$$125 + 1000 = \frac{V_C}{2} \rightarrow \frac{V_C}{2} = 1125 \rightarrow V_C = 2250 \text{ cm}^3$$

Pronto, sabemos o volume do bloco retangular C!

- Agora, vamos calcular a área da base do bloco retangular C.

$$A_b = 18 \cdot 10 \rightarrow A_b = 180 \text{ cm}^2$$

- Lembre-se que o volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura. Assim,

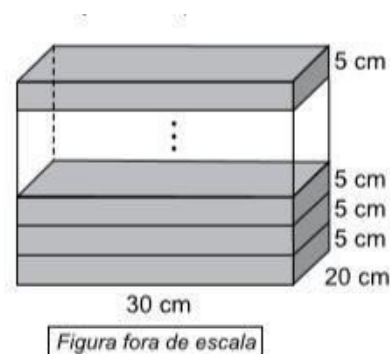
$$V_C = A_b \cdot h$$

Substituindo os valores que encontramos para V_C e A_b , ficamos com:

$$2250 = 180h \rightarrow h = \frac{2250}{180} \rightarrow h = 12,5 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA A.

8. (VUNESP/Instituto de Previdência Social dos Servidores Municipais de Valinhos (SP)/2020) Vários blocos de papel, todos iguais entre si, e cada um deles no formato de um prisma reto de base retangular, com 30 cm de comprimento, 20 cm de largura e 5 cm de altura, foram empilhados, conforme mostra a figura.



Se o volume total dessa pilha é $45\,000 \text{ cm}^3$, o número de blocos dela é



- A) 11
- B) 12
- C) 13
- D) 14
- E) 15

Comentários:

A pilha de blocos forma um grande **paralelepípedo**. Lembre-se que o volume de um paralelepípedo é igual ao **produto da área da base pela altura**.

$$V = A_b \cdot H$$

- A área da base vai ser **a área de um retângulo de medidas 30 cm x 20 cm**. Assim,

$$A_b = 30 \cdot 20 \rightarrow A_b = 600 \text{ cm}^2$$

- **A altura vai depender do número de blocos**. Considere que o paralelepípedo seja formado por "n" blocos. Como cada bloco tem 5 cm de altura, **a altura total será "5n"**. Logo,

$$H = 5n$$

- Juntando as três informações acima, ficamos com:

$$V = 600 \cdot 5n \rightarrow V = 3000n$$

O enunciado disse que **o volume total é de 45.000 cm³**. Vamos substituir esse valor na expressão.

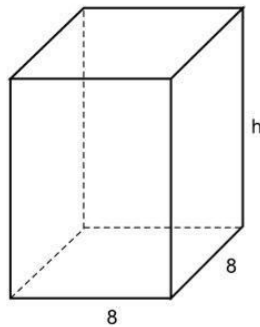
$$45000 = 3000n \rightarrow n = \frac{45000}{3000} \rightarrow n = 15$$

Logo, **a pilha é formada por 15 blocos**.

Gabarito: LETRA E.

9. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Piracicaba (SP)/2020) Considere um recipiente com a forma de paralelepípedo reto retângulo e com dimensões, em centímetros, indicadas na figura.





Se colocarmos 576 cm^3 de um líquido nesse recipiente, inicialmente vazio, a quarta parte da sua capacidade total não será preenchida. Nessas condições, é correto afirmar que a medida da altura desse recipiente, indicada por h na figura, é

- A) 14 cm.
- B) 12 cm.
- C) 11 cm.
- D) 10 cm.
- E) 9 cm.

Comentários:

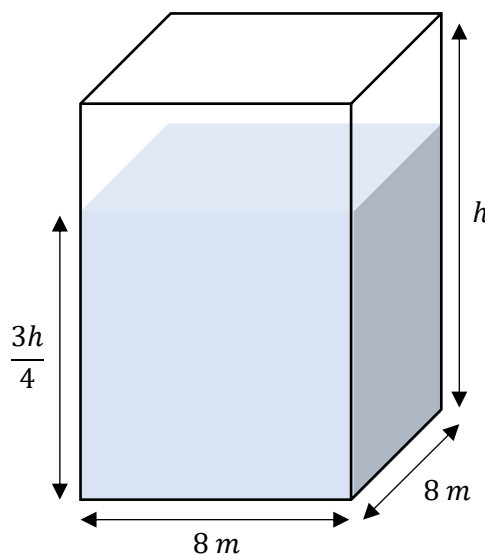
O recipiente é um paralelepípedo. Logo, seu volume é dado por:

$$V = A_b \cdot H$$

- Note que a base do paralelepípedo é um quadrado de lado igual 8. Dessa forma, sua área é dada por:

$$A_b = 8^2 \rightarrow A_b = 64 \text{ cm}^2$$

- Com o volume colocado, $\frac{1}{4}$ do recipiente não foi preenchido. Com isso, podemos concluir que $\frac{3}{4}$ do recipiente foi preenchido. A figura abaixo mostra como ficou a situação:



Observe que **a altura do líquido será de $\frac{3}{4}$ de h** . Logo,

$$V = 64 \cdot \frac{3h}{4} \rightarrow V = 48h$$

Como o volume colocado foi de 576 cm^3 , podemos substituí-lo na expressão acima.

$$576 = 48h \rightarrow h = \frac{576}{48} \rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

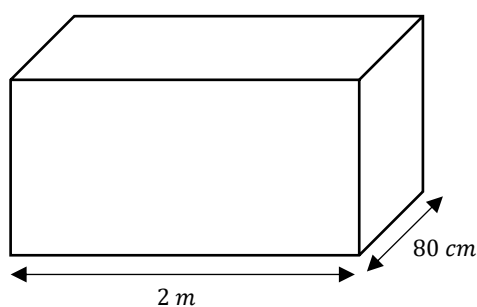
Gabarito: LETRA B.

10. (VUNESP/TJ-SP/2015) Dois recipientes (sem tampa), colocados lado a lado, são usados para captar água da chuva. O recipiente A tem o formato de um bloco retangular, com 2 m de comprimento e 80 cm de largura, e o recipiente B tem a forma de um cubo de 1 m de aresta. Após uma chuva, cuja precipitação foi uniforme e constante, constatou-se que a altura do nível da água no recipiente B tinha aumentado 25 cm, sem transbordar. Desse modo, pode-se concluir que a água captada pelo recipiente A nessa chuva teve volume aproximado, em m^3 , de

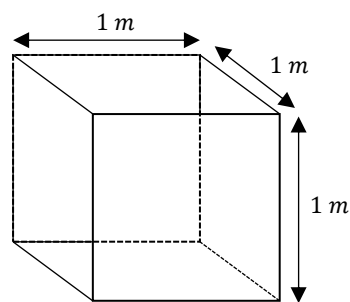
- A) 0,40.
- B) 0,36.
- C) 0,32.
- D) 0,30.
- E) 0,28.

Comentários:

Vamos esquematizar a situação proposta no enunciado.



RECIPIENTE A



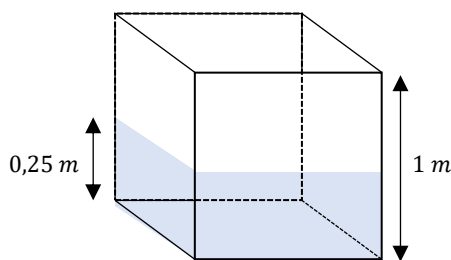
RECIPIENTE B

- Note que **o recipiente B é um cubo de 1 metro de aresta**. Sendo assim, a sua base tem área igual a:

$$A_{b,B} = a^2 \rightarrow A_{b,B} = 1^2 \rightarrow A_{b,B} = 1 \text{ m}^2$$



- Depois da chuva, ficamos com a seguinte situação no recipiente B:



RECIPIENTE B

Portanto, o volume de água será dado por:

$$V_{\text{água em B}} = A_b \cdot H$$

Substituindo $A_b = 1 \text{ m}^2$ e $H = 0,25 \text{ m}$, ficamos com:

$$V_{\text{água em B}} = 1 \cdot 0,25 \rightarrow V_{\text{água em B}} = 0,25 \text{ m}^3$$

Agora vem o pulo do gato! *Você concorda comigo que o recipiente A captará mais água do que o B?* Podemos dizer isso pois **a área da base de A é maior que a de B**:

$$A_{b,A} = 2 \cdot 0,8 \rightarrow A_{b,A} = 1,6 \text{ m}^2$$

Ela é 60% maior. Sendo assim, **o volume de água captado por A também será 60% maior**.

$$V_{\text{água em A}} = 1,6 \cdot V_{\text{água em B}} \rightarrow V_{\text{água em A}} = 1,6 \cdot 0,25 \rightarrow V_{\text{água em A}} = 0,4 \text{ m}^3$$

Gabarito: LETRA A.

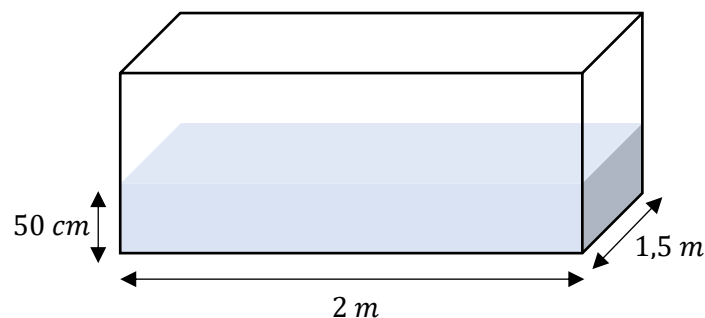
11. (VUNESP/TJ-SP/2014) Considere um reservatório com o formato de um paralelepípedo reto retângulo, com 2 m de comprimento e 1,5 m de largura, inicialmente vazio. A válvula de entrada de água no reservatório foi aberta por certo período, e, assim, a altura do nível da água no reservatório atingiu 50 cm, preenchendo 40% da sua capacidade total. Desse modo, é correto afirmar que a medida da altura desse reservatório, em metros, é igual a

- A) 1,50.
- B) 1,35.
- C) 1,75.
- D) 1,65.
- E) 1,25.



Comentários:

Com as informações do enunciado, podemos esquematizar o seguinte:



Para o **100% cheio**, temos que seu volume V é dado por:

$$V = A_b \cdot H \quad (1)$$

Para o **40% cheio**, temos que seu volume é $0,4V$ e pode ser dado por:

$$0,4 \cdot V = A_b \cdot h \quad (2)$$

Vamos substituir (1) em (2):

$$0,4 \cdot A_b \cdot H = A_b \cdot h$$

Como **a área da base não muda**, podemos cortá-la.

$$h = 0,4 \cdot H \rightarrow H = \frac{h}{0,4}$$

Portanto, basta **substituímos $h = 50 \text{ cm}$ na expressão acima**.

$$H = \frac{50}{0,4} \rightarrow H = 125 \text{ cm}$$

O resultado acima está em centímetros, mas **as alternativas estão em metros**. Para fazer a conversão, temos que dividir o resultado por 100.

$$H = \frac{125}{100} \rightarrow H = 1,25 \text{ m}$$

Gabarito: LETRA E.



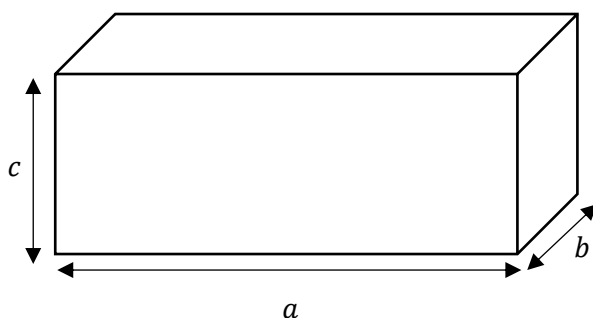
12. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Araçatuba (SP)/2019) Um reservatório de água tem formato interno de prisma reto retangular, com arestas medindo, em metros, 10, 10 e 5. A capacidade máxima, em litros, desse reservatório

- A) 5000
- B) 25000
- C) 50000
- D) 250000
- E) 500000

Comentários:

Um **prisma reto retangular é um paralelepípedo**.

- Lembre-se que, no contexto da Geometria Espacial, **capacidade é a mesma coisa que volume**.
- Como a questão forneceu as medidas das arestas, **devemos multiplicá-las** para obter o volume.



VOLUME = abc

Assim,

$$V = 10 \cdot 10 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad V = 500 \, m^3$$

- Observe que a resposta que encontramos está em m^3 , afinal, todas as medidas estão em metros.
- Para obter a resposta em litros, **devemos multiplicar o resultado por mil**. Não se esqueça:

$1 \, m^3 = 1.000 \, L$

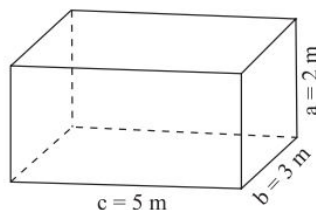
Logo,

$$V = 500 \cdot 1.000 \quad \rightarrow \quad V = 500.000 \, L$$

Gabarito: LETRA E.

13. (VUNESP/TJ-SP/2006) A figura mostra uma caixa d'água em forma de um paralelepípedo reto retângulo, com medidas em metros. Aumentando-se em um quinto a medida do comprimento (c), e mantendo-se inalterados volume (V) e altura (a), teremos uma nova caixa, cuja largura (b) será igual a (Dado: $V = abc$).





- A) 2,9 m.
- B) 2,8 m.
- C) 2,7 m.
- D) 2,5 m.
- E) 2,2 m.

Comentários:

O volume de um paralelepípedo é dado pelo **produto das três dimensões**.

$$V = abc$$

Substituindo os valores fornecidos pela questão, podemos encontrar o volume:

$$V = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow V = 30 \text{ m}^3$$

- Agora, note que o enunciado **aumentou em 1/5 o comprimento**. Aumentar em 1/5 é equivalente a aumentar 20%. Sendo assim, o novo comprimento passa a ser:

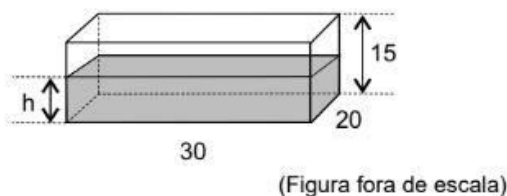
$$c' = 1,2 \cdot c \rightarrow c' = 1,2 \cdot 5 \rightarrow c' = 6 \text{ m}$$

- Além disso, **a questão falou que nem o volume, nem a altura mudaram**. O volume do novo paralelepípedo é **o produto das três dimensões**. Assim,

$$V' = a'b'c' \rightarrow 30 = 2 \cdot b' \cdot 6 \rightarrow b' = \frac{30}{12} \rightarrow b' = 2,5 \text{ m}$$

Gabarito: LETRA D.

14. (VUNESP/Instituto de Previdência do Município de Marília (SP)/2019) Em uma lata vazia, que tem a forma de um prisma reto de base retangular, com 15 cm de altura, foi colocado açúcar, conforme mostra a figura, cujas medidas indicam as dimensões internas da lata, em centímetros.



(Figura fora de escala)



Sabendo que esse açúcar ocupou 80% do volume total da lata, então, a altura do açúcar nessa lata, indicada na figura pela letra h , é de

- A) 14 cm.
- B) 12 cm.
- C) 10 cm.
- D) 8 cm.
- E) 6 cm.

Comentários:

Galera, em um paralelepípedo, se 80% do volume está ocupado, então a altura estará em 80% da máxima. Afinal, note que **a área da base não muda!**

Para o 100% cheio, temos que seu volume V é dado por:

$$V = A_b \cdot H \quad (1)$$

Para o 80% cheio, temos que seu volume é $0,8V$ e pode ser dado por:

$$0,8 \cdot V = A_b \cdot h \quad (2)$$

Vamos substituir (1) em (2):

$$0,8 \cdot A_b \cdot H = A_b \cdot h$$

Como **a área da base não muda**, podemos cortá-la.

$$h = 0,8 \cdot H$$

Note que a altura do recipiente que está com 80% da capacidade, é **80% da altura máxima**.

- O enunciado disse que **a altura máxima do recipiente é 15 cm**. Assim, a altura do açúcar na lata é:

$$h = 0,8 \cdot 15 \rightarrow \mathbf{h = 12 \text{ cm}}$$

Gabarito: LETRA B.

15. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Sorocaba (SP)/2019) Um reservatório d'água no formato interno de paralelepípedo reto retangular tem altura interna de 15 metros e comporta um volume total de 135 metros cúbicos de água. Sabendo-se que a base desse reservatório é quadrada, a soma das medidas de todas as arestas internas desse reservatório, em metros, é igual a

- A) 24



- B) 39
- C) 54
- D) 69
- E) 84

Comentários:

Temos **um paralelepípedo de altura 15 metros e volume 135 m^3** . Vamos supor que a **base tenha aresta "a"**. Como ela é quadrada, a sua área vai ser dada por:

$$A_b = a^2$$

- Sabemos que **a área de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura**. Assim,

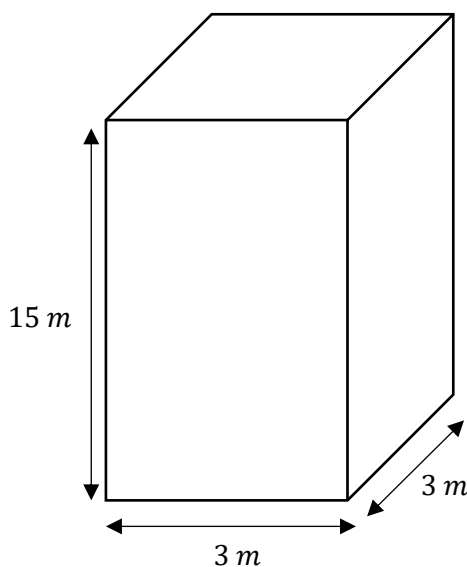
$$V = A_b \cdot H$$

- Substituindo as informações que temos na expressão acima:

$$135 = a^2 \cdot 15 \rightarrow a^2 = \frac{135}{15} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \text{ m}$$

Portanto, **a aresta da base mede 3 metros**.

- O enunciado pede **a soma de todas as arestas**. Tanto na base inferior quanto na superior teremos 4 arestas cada uma medindo 3 m. Assim, **vamos ter 8 arestas de 3 metros**. Além disso, na lateral, temos **4 arestas medindo 15 m**, que serão as alturas. Observe a imagem abaixo para melhor visualização:



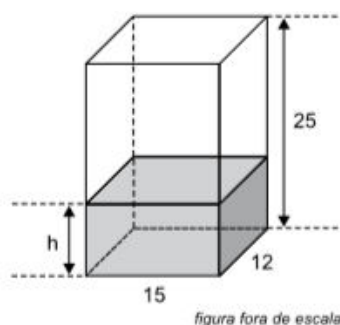
Com isso, podemos dizer que a soma de todas as arestas será:



$$S = 15 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \rightarrow S = 60 + 24 \rightarrow S = 84$$

Gabarito: LETRA E.

16. (VUNESP/Escola Superior de Educação Física de Jundiaí (SP)/2019) Em um recipiente na forma de um prisma reto de base retangular, colocou-se água, conforme mostra a figura, na qual estão indicadas as medidas internas, em centímetros.



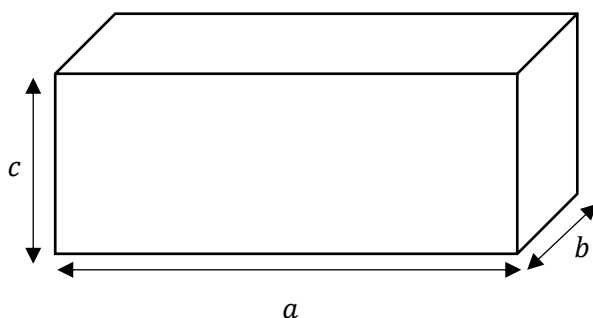
Lembrando que 1 litro = 1 000 cm³, e que a altura da água dentro do recipiente, indicada na figura pela letra h, corresponde a 2/5 da altura total do recipiente, então, a quantidade de água, em litros, colocada dentro dele foi igual a

- A) 1,5
- B) 1,6
- C) 1,7
- D) 1,8
- E) 1,9

Comentários:

Se a altura da água dentro do recipiente corresponde a 2/5 da altura total do recipiente é por que **2/5 do volume total está preenchido**.

- Note que temos todas **as três arestas do paralelepípedo: 12, 15 e 25**. Com elas podemos calcular o volume total do recipiente.



$$\text{VOLUME} = abc$$



Assim,

$$V = 12 \cdot 15 \cdot 25 \rightarrow V = 4.500 \text{ cm}^3$$

Esse é o volume total. Como a altura de água está em apenas $\frac{2}{5}$ da total, então **teremos $\frac{2}{5}$ da capacidade máxima preenchida**.

$$V_{\text{água}} = \frac{2}{5} \cdot 4500 \rightarrow V_{\text{água}} = 1800 \text{ cm}^3$$

Para finalizar, **o enunciado pede a resposta em litros**. Para isso, seria interessante lembrar que:

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$$

Como **1 cm^3 é igual a 1 mL** , podemos escrever:

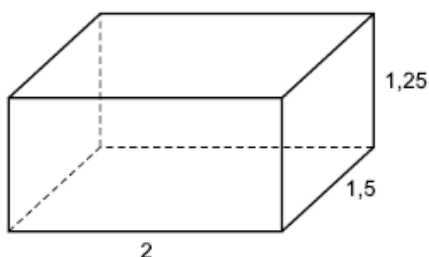
$$V_{\text{água}} = 1800 \text{ mL}$$

Para passar de mL para litros, devemos dividir por mil.

$$V_{\text{água}} = 1800 \rightarrow V_{\text{água}} = \frac{1800}{1000} \rightarrow \mathbf{V_{\text{água}} = 1,8 \text{ L}}$$

Gabarito: LETRA D.

17. (VUNESP/Escola Superior de Educação Física de Jundiaí (SP)/2019) Considere um reservatório, com formato de paralelepípedo reto retângulo e com as dimensões indicadas em metros na figura, que está completamente cheio de água.



Esse reservatório será esvaziado na razão de $0,15 \text{ m}^3$ de água a cada 15 minutos. Se o processo de esvaziamento for iniciado às 8 horas e 15 minutos, e não houver interrupções, ele estará totalmente concluído às

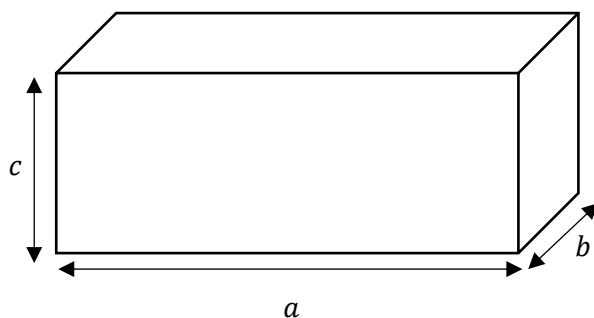
A) 15 horas e 30 minutos.



- B) 14 horas e 40 minutos.
- C) 14 horas e 30 minutos.
- D) 14 horas e 15 minutos.

Comentários:

O enunciado deu um reservatório que está **completamente cheio de água**. Como temos todas as suas dimensões, podemos calcular o volume.



$$\text{VOLUME} = abc$$

Assim,

$$V = 2 \cdot 1,5 \cdot 1,25 \rightarrow V = 3,75 \text{ m}^3$$

O reservatório é esvaziado a uma razão de **0,15 m³ a cada 15 minutos**. Logo, podemos esquematizar uma regra de três.

15 minutos	←→	0,15 m³
x	←→	3,75 m³

Podemos multiplicar cruzado.

$$0,15x = 15 \cdot 3,75 \rightarrow x = \frac{56,25}{0,15} \rightarrow x = 375 \text{ minutos}$$

Portanto, **o reservatório demora 375 minutos para ser esvaziado**. Como 60 minutos corresponde a 1 hora:

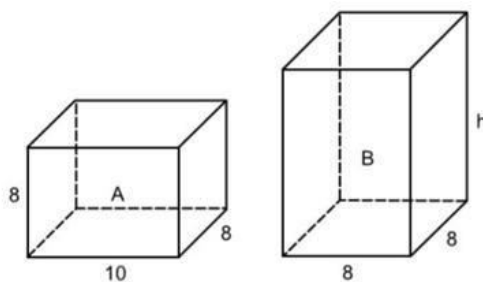
$$375 \text{ minutos} = 6 \text{ horas e } 15 \text{ minutos}$$

Como o processo começou às 08:15, **ele terminará 6 horas e 15 minutos depois**, às 14:30.

Gabarito: LETRA C.

18. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Campinas (SP)/2019) Considere as embalagens A e B, desenvolvidas para determinado produto. As duas têm formato de paralelepípedo reto retângulo, e dimensões indicadas em centímetros nas figuras.





Os preços de custo da embalagem A é R\$ 20,00 e da embalagem B é R\$ 30,00 e são diretamente proporcionais aos respectivos volumes. A medida da altura da embalagem B, indicada por h na figura, é igual a

- A) 14 cm
- B) 12 cm
- C) 13 cm
- D) 11 cm
- E) 15 cm

Comentários:

- Vamos calcular o volume do **paralelepípedo A**:

$$V_A = 8 \cdot 10 \cdot 8 \rightarrow V_A = 640$$

- Agora, vamos calcular o volume do **paralelepípedo B**:

$$V_B = 8 \cdot 8 \cdot h \rightarrow V_B = 64h$$

- O enunciado fala que **o preço da embalagem (P) é diretamente proporcional ao volume (V)**, assim:

$$P = kV$$

- **k é uma constante de proporcionalidade**. Note que quanto maior o volume, maior será P.

- Como **temos o preço e o volume de A**, podemos substituir na relação acima e encontrar o valor de k.

$$20 = k \cdot 640 \rightarrow k = \frac{2}{64} \rightarrow k = \frac{1}{32}$$

Portanto, o preço está se relacionando com o volume da seguinte forma:

$$P = \frac{1}{32}V$$



- **Temos o preço e o volume de B**, podemos substituir na fórmula acima.

$$30 = \frac{1}{32} \cdot (64h) \rightarrow 30 = 2h \rightarrow h = 15 \text{ cm}$$

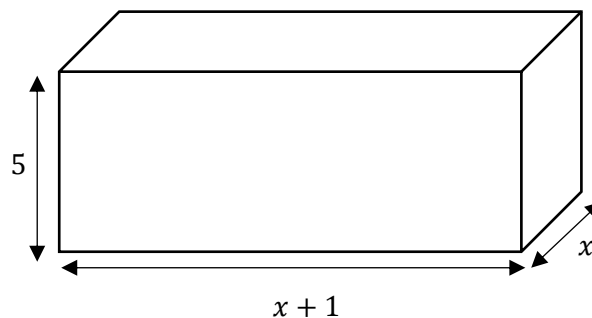
Gabarito: LETRA E.

19. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) Um recipiente no formato interno de paralelepípedo reto, de altura 5 cm e base retangular, em que a medida da maior aresta excede em 1 cm a medida da menor aresta, tem volume total de 150 cm^3 . A medida, em cm, da maior aresta da base desse recipiente é

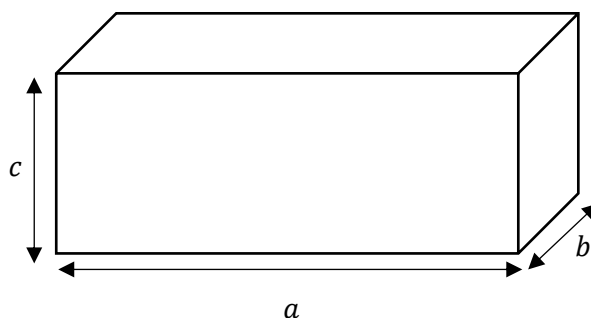
- A) 10
- B) 9
- C) 8
- D) 7
- E) 6

Comentários:

Vamos desenhar a situação.



Da teoria, temos o seguinte:



VOLUME = abc

Logo, podemos calcular **o volume do paralelepípedo em função de x** .



$$V = 5 \cdot x \cdot (x + 1) \rightarrow V = 5x^2 + 5x$$

A questão nos forneceu **o volume total: 150 cm³**.

$$5x^2 + 5x = 150 \rightarrow x^2 + x - 30 = 0$$

Uma **equação de segundo grau**! Vamos usar Bhaskara!

- **Cálculo do Discriminante:**

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) \rightarrow \Delta = 1 + 120 \rightarrow \Delta = 121$$

- **Cálculo das Raízes**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 - 11}{2} \rightarrow x_1 = -\frac{12}{2} \rightarrow x_1 = -6$$

$$x_2 = \frac{-1 + 11}{2} \rightarrow x_2 = \frac{10}{2} \rightarrow x_2 = 5$$

Perceba que "**x**" é a **medida de uma aresta**. Dessa forma, não pode ser um número negativo. Logo, x_1 não tem efeitos práticos para esse exercício e **devemos considerar apenas x_2** . Como o enunciado pede **a maior aresta**, temos que:

$$MAIOR ARESTA = x + 1 \rightarrow MAIOR ARESTA = 6$$

Gabarito: LETRA E.

20. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) Um reservatório de forma cúbica teve 25% de seu volume preenchido por um líquido A, 60% por um líquido B, e os 259,2 litros restantes foram preenchidos por um líquido C. Então, o valor da medida da aresta do reservatório cúbico é igual a

- A) 1,2 m.
- B) 3,6 m.
- C) 5,76 m.
- D) 8,6 m.
- E) 12 m.

Comentários:



Temos um reservatório cúbico que foi preenchido com 3 líquidos diferentes. Observe que 60% foi de um líquido A e 25% de um líquido B. **Somente esses dois líquidos estão ocupando $60\% + 25\% = 85\%$.** Com isso, sobra apenas 15% do reservatório para ser preenchido com o líquido C.

Ora, **se 15% do reservatório correspondem a 259,2 litros**, então podemos esquematizar uma regra de três e descobrir a quantos litros correspondem 100% do reservatório.

$$\begin{array}{ccc} 259,2 & \longleftrightarrow & 15\% \\ x & \longleftrightarrow & 100\% \end{array}$$

$$15 \cdot x = 100 \cdot 259,2 \rightarrow x = \frac{25920}{15} \rightarrow x = 1728 L$$

Logo, o reservatório tem 1728 litros. Observe que **as alternativas estão em metros**. Logo, precisamos **transformar essa unidade (litros) em m^3** , pois assim acharemos as arestas já em metros. Tudo bem? Lembre da nossa tabela de conversão:

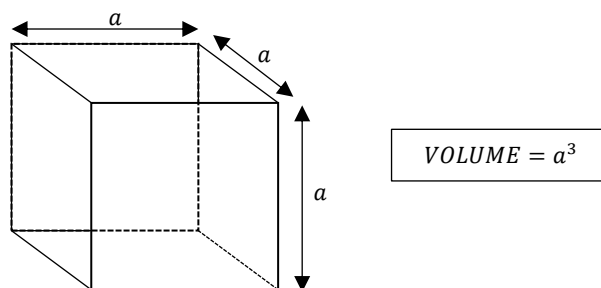
Conversão de Unidades mais Comuns		
De:	Para:	Ação:
mL	cm^3	São equivalentes. $1 cm^3 = 1 mL$.
L	dm^3	São equivalentes. $1 dm^3 = 1 L$.
L	m^3	Dividimos por mil. $1 L = 0,001 m^3$
L	mL	Multiplicamos por mil. $1L = 1000 mL$
m^3	cm^3	Multiplicamos por 1 milhão. $1 m^3 = 1000000 cm^3$

De litros para m^3 , **devemos dividir por mil**.

$$x = \frac{1728}{1000} \rightarrow x = 1,728 m^3$$

Para finalizar a questão, veja que o enunciado diz que **o formato do reservatório é cúbico**, vamos relembrar:





Assim,

$$V = a^3 \rightarrow a^3 = 1,728 \rightarrow a = \sqrt[3]{1,728} \rightarrow \mathbf{a = 1,2\ m}$$

Gabarito: LETRA A.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

Pirâmide

1. (VUNESP/ISS-JAGUARIÚNA/2023) Uma peça em metal maciço tem o formato de pirâmide reta, com altura de 20 cm e base no formato de losango, com diagonais medindo 10 cm e 12 cm. Seu valor comercial está associado ao volume do metal utilizado na sua fabricação, sendo cada cm^3 do referido material comercializado a R\$ 1,50. Sendo assim, o valor comercial desta peça é de

- A) R\$ 400,00.
- B) R\$ 600,00.
- C) R\$ 900,00.
- D) R\$ 1.200,00.
- E) R\$ 1.800,00.

Comentários:

O volume de uma pirâmide pode ser calculado por meio da seguinte expressão:

$$V = \frac{A_b H}{3}$$

Observe que o enunciado fala que a base dessa pirâmide é um losango com diagonais medindo 10 e 12 cm.

$$A_b = \frac{Dd}{2} \quad \rightarrow \quad A_b = \frac{10 \cdot 12}{2} \quad \rightarrow \quad A_b = 60 \text{ cm}^2$$

Como também temos a altura dessa pirâmide, podemos calcular o seu volume.

$$V = \frac{60 \cdot 20}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{V = 400 \text{ cm}^3}$$

Beleza, como cada cm^3 do material é comercializado a R\$ 1,50, podemos fazer uma regra de três simples para determinar o valor comercial dessa peça.

1 cm^3	$\longleftrightarrow$	R\$ 1,50
400 cm^3	$\longleftrightarrow$	x

Vamos multiplicar cruzado.



$$x = 1,50 \cdot 400 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 600}$$

Pronto! **O valor comercial da peça é R\$ 600,00.**

Gabarito: LETRA B.

2. (VUNESP/PREF. JUNDIAÍ/2023) Um peso para papel tem o formato de pirâmide reta, com volume de 96 cm^3 e base quadrada. Sendo o perímetro da base igual a 24 cm, a altura dessa pirâmide é de

- A) 7,0 cm.
- B) 7,5 cm.
- C) 8,0 cm.
- D) 8,5 cm.
- E) 9,0 cm.

Comentários:

Sabemos que a base é quadrada e **seu perímetro é 24 cm.**

Considere que cada lado da base mede "L". Com isso, podemos escrever que:

$$4L = 24 \quad \rightarrow \quad L = 6 \text{ cm}$$

Com o lado da base, vamos calcular **a área da base.**

$$A_b = L^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 6^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 36 \text{ cm}^2$$

Temos o volume e a área da base, podemos encontrar **a altura da pirâmide.**

$$V = \frac{A_b H}{3} \quad \rightarrow \quad 96 = \frac{36H}{3} \quad \rightarrow \quad H = \frac{96}{12} \quad \rightarrow \quad \boxed{H = 8}$$

Gabarito: LETRA C.

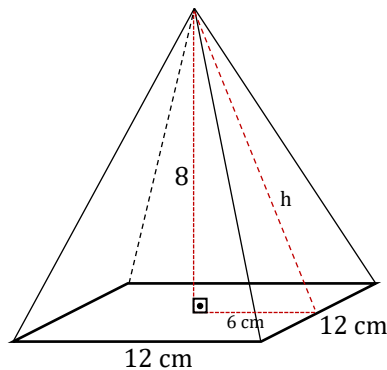
3. (VUNESP/PREF. SJRP/2023) Um objeto em formato de uma pirâmide reta de base quadrada tem altura igual a 8 cm. Se a aresta da base mede 12 cm, então a área total desse objeto, em cm^2 , é

- A) 248.
- B) 356.
- C) 384.
- D) 432.
- E) 482.



Comentários:

Vamos esquematizar essa pirâmide do enunciado.



Observe que temos uma pirâmide de base quadrada. Como queremos a **área total** do objeto, precisamos encontrar a área da base e a área da face triangular.

A área da base é mais tranquila pois temos um **quadrado de lado igual a 12 cm**.

$$A_b = 12^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 144 \text{ cm}^2$$

Por sua vez, **a face lateral é um triângulo**. Para encontrarmos a altura desse triângulo ("h"), devemos visualizar o **triângulo retângulo destacado na figura**. A altura será igual a hipotenusa desse triângulo.

$$h^2 = 8^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 64 + 36 \quad \rightarrow \quad h^2 = 100 \quad \rightarrow \quad h = 10$$

Para encontrarmos a **área da face lateral**, usamos a área do triângulo:

$$A_l = \frac{bh}{2} \quad \rightarrow \quad A_l = \frac{12 \cdot 10}{2} \quad \rightarrow \quad A_l = 60 \text{ cm}^2$$

Pronto! A **área total** fica:

$$A_t = A_b + 4A_l$$

$$A_t = 144 + 4 \cdot 60$$

$$A_t = 144 + 240$$

$$\boxed{A_t = 384 \text{ cm}^2}$$

Gabarito: LETRA C.

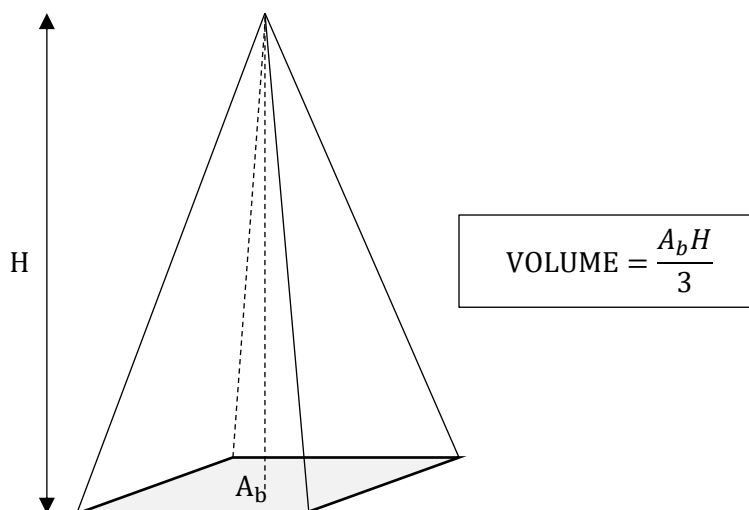


4. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Balneária de Peruíbe (SP)/2019) Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de 100 cm^3 . A área da base dessa pirâmide, em cm^2 , é

- A) 25
- B) 26
- C) 30
- D) 36
- E) 50

Comentários:

Opa, agora temos uma **pirâmide de base retangular**! Lembre-se:



O enunciado forneceu a altura e o volume, podemos calcular a área da base substituindo na fórmula acima.

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3} \rightarrow 100 = \frac{A_b \cdot 12}{3} \rightarrow A_b = \frac{300}{12} \rightarrow A_b = 25 \text{ cm}^2$$

Pronto! Podemos marcar que **a área da base é 25 cm^2** .

Gabarito: LETRA A.

5. (VUNESP/PREF. MORRO AGUDO/2020) Uma peça em madeira maciça, com formato de pirâmide reta de base quadrada, tem volume de 484 cm^3 e altura de 12 cm. Logo, a aresta da base dessa peça mede

- A) 14 cm.
- B) 13 cm.
- C) 12 cm.
- D) 11 cm.
- E) 10 cm.

Comentários:



O volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

O enunciado disse que $V = 484 \text{ cm}^3$ e $h = 12 \text{ cm}$. **Vamos substituir esses valores na fórmula** acima para obtermos a área da base.

$$484 = \frac{12 \cdot A_b}{3} \rightarrow 4 \cdot A_b = 484 \rightarrow A_b = 121 \text{ cm}^2$$

A base da pirâmide é quadrada! Logo, sabemos que a área da base **é o valor da aresta elevado a 2!**

$$A_b = a^2 \rightarrow a^2 = 121 \rightarrow a = 11 \text{ cm}$$

Assim, **a aresta da base dessa pirâmide mede 11 cm.**

Gabarito: LETRA D.

6. (VUNESP/PREF. PERUÍBE/2019) Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de 100 cm^3 . A área da base dessa pirâmide, em cm^2 , é

- A) 25.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 36.
- E) 50.

Comentários:

O volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b h}{3}$$

O enunciado disse que $V = 100 \text{ cm}^3$ e $h = 12 \text{ cm}$. **Vamos substituir esses valores na fórmula** acima para obtermos a área da base.

$$100 = \frac{12 \cdot A_b}{3} \rightarrow 4 \cdot A_b = 100 \rightarrow A_b = 25 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA A.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

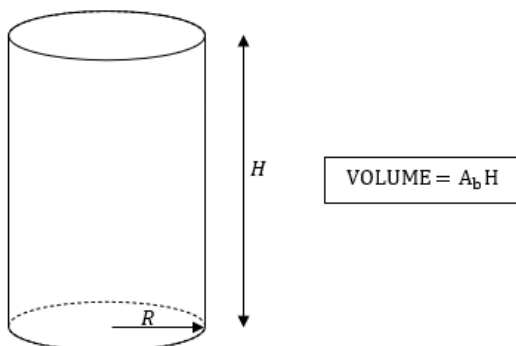
Cilindro

1. (VUNESP/PREF. SP/2023) Um fiscal encontrou em uma feira livre um vendedor de água sanitária vendendo esse produto em um recipiente cilíndrico de diâmetro 8 cm e altura 15 cm. O produto era oferecido como se no recipiente houvesse 1 litro de água sanitária e o vendedor cobrava R\$ 2,50 por recipiente. Mantida a proporção, o preço por litro de água sanitária que esse vendedor de fato está cobrando está entre (Dados: $\pi = 3,14$)

- A) R\$ 2,90 e R\$ 3,00.
- B) R\$ 3,30 e R\$ 3,40.
- C) R\$ 3,00 e R\$ 3,10.
- D) R\$ 3,10 e R\$ 3,20.
- E) R\$ 3,20 e R\$ 3,30.

Comentários:

Vamos calcular o volume desse recipiente cilíndrico.



O enunciado informou que **a altura do recipiente é 15 cm** e que **o diâmetro da base é 8 cm** (logo, raio 4 cm). Com essas informações, já é possível calcular o volume.

$$V = \pi R^2 H$$

$$V = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 15$$

$$V = 753,6 \text{ cm}^3$$

Como 1 cm^3 corresponde a **1 mL**, então:

$$V = 753,6 \text{ mL} = 0,7536 \text{ L}$$



O vendedor cobra **R\$ 2,50 por essa quantidade**. Sendo assim, o verdadeiro valor que está sendo cobrado por litro pode ser encontrado por meio da seguinte regra de três simples.

$$\begin{array}{ccc} 0,7536 \text{ L} & \longleftrightarrow & \text{R\$ 2,50} \\ 1 \text{ L} & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$0,7536x = 2,50 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2,50}{0,7536} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 3,31}$$

Pronto! **O valor real do litro é R\$ 3,31.**

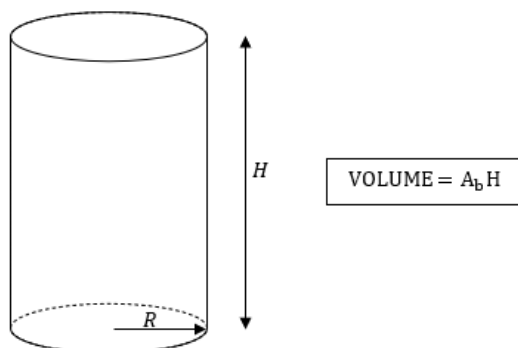
Gabarito: LETRA B.

2. (VUNESP/PREF. SJRP/2023) Adotando-se $\pi = 3,14$, quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados em um cartucho de tinta para caneta tinteiro, com a forma de um cilindro circular reto com paredes de espessuras desprezíveis, sabendo-se que o diâmetro da base circular do cartucho é 6 mm e sua altura é 7 cm?

- A) 19,782 mL.
- B) 1,9782 mL.
- C) 0,19782 mL.
- D) 0,019872 mL.
- E) 0,0019782 mL.

Comentários:

Questão bem direta que pede o cálculo do **volume de um cilindro**.



Temos que **o diâmetro da base é 6 mm** (o raio é 3 mm) e a **altura é 7 cm**. Logo:



$$V = \pi R^2 H$$

$$V = 3,14 \cdot 0,3^2 \cdot 7$$

$$V = 1,9782 \text{ cm}^3 = 1,9782 \text{ mL}$$

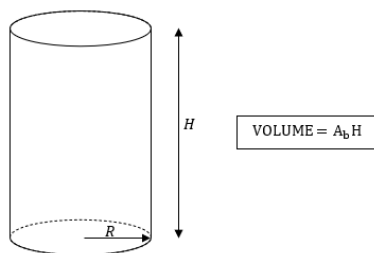
Gabarito: LETRA B.

3. (VUNESP/PREF. CAMPINAS/2022) O interior de um reservatório tem um formato cilíndrico, com sua altura correspondendo a 3 vezes o comprimento do diâmetro de sua base. Sendo a capacidade aproximada desse reservatório de 150720 litros, a sua área lateral interna é de, aproximadamente,

- A) 143 m².
- B) 162 m².
- C) 170 m².
- D) 151 m².
- E) 132 m².

Comentários:

Temos um reservatório com formato cilíndrico.



De acordo com o enunciado, **a altura é 3 vezes o diâmetro**. Logo:

$$H = 3D \quad \rightarrow \quad H = 3 \cdot (2R) \quad \rightarrow \quad H = 6R$$

Com isso, podemos escrever que **o volume do cilindro** é:

$$V = A_b H$$

$$V = \pi R^2 H$$

$$V = \pi R^2 (6R)$$

$$V = 6\pi R^3$$



Agora, vamos usar o fato de que o cilindro possui volume igual a **150720 litros**, ou seja, $150,720 \text{ m}^3$.

$$6\pi R^3 = 150,720$$

$$R^3 = \frac{150,720}{6 \cdot 3,14}$$

$$R^3 = 8$$

$$\boxed{R = 2 \text{ m}}$$

Com o raio, encontramos também a altura.

$$H = 6R \quad \rightarrow \quad H = 6 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{H = 12 \text{ m}}$$

Pronto! Com o raio e a altura do cilindro, vamos calcular a sua **área lateral**.

$$A_{lateral} = 2\pi Rh$$

$$A_{lateral} = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 12$$

$$\boxed{A_{lateral} = 150,72 \text{ m}^2}$$

Gabarito: LETRA D.

4. (VUNESP/PREF. GUARATINGUETÁ/2022) A área lateral de um cilindro circular reto com altura de 5 cm e diâmetro de base igual a 20 cm é de, aproximadamente,

- A) 160 cm^2 .
- B) 315 cm^2 .
- C) 365 cm^2 .
- D) 415 cm^2 .
- E) 620 cm^2 .

Comentários:

Mais uma questão para calcularmos a **área lateral de um cilindro**. Dessa vez, de uma forma mais direta.

Vimos que a área lateral de um cilindro é:

$$A_{lateral} = 2\pi Rh$$



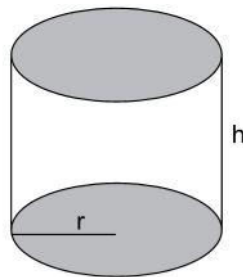
O enunciado informa que **a altura é 5 cm** e o diâmetro da base é 20 cm (**raio igual a 10 cm**). Logo:

$$A_{lateral} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 5$$

$$A_{lateral} \cong 315 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA B.

5. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Campinas (SP)/2019) Analise o sólido geométrico da figura

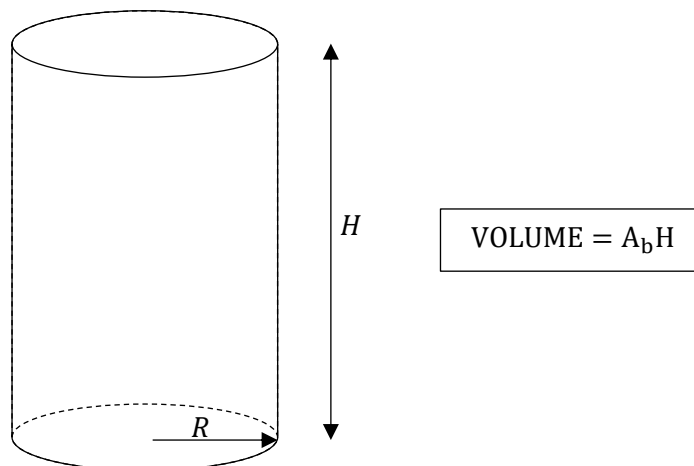


Se $h = 48 \text{ cm}$ e $r = 17 \text{ cm}$, esse sólido tem um volume de:

- A) $0,082 \text{ m}^3$
- B) $0,068 \text{ m}^3$
- C) $0,123 \text{ m}^3$
- D) $0,044 \text{ m}^3$
- E) $0,246 \text{ m}^3$

Comentários:

A figura acima representa um cilindro! Seu volume é calculado pelo **produto da área da base pela altura**.



No cilindro, temos uma base circular. **A área a ser calculada é a da circunferência**. Assim,



$$A_b = \pi R^2$$

O enunciado disse que o raio é 17 cm (0,17 m), então

$$A_b = \pi \cdot (0,17)^2 \rightarrow A_b = 0,0289\pi \text{ m}^2$$

Vamos usar $\pi = 3,14$

$$A_b = 0,0289 \cdot 3,14 \rightarrow A_b = 0,090746 \text{ m}^2$$

Como a altura é 48 cm (0,48 m), podemos substituir tudo na fórmula do volume do cilindro:

$$V = A_b \cdot H \rightarrow V = 0,090746 \cdot 0,48 \rightarrow V = 0,04355 \text{ m}^3$$

Podemos aproximar o resultado encontrado para 0,044 m³, conforme consta em D.

Obs.: Essa questão realmente tem umas continhas chatas de se trabalhar. Uma dica para resolver é a seguinte: operar com todas as unidades em centímetros (cm). Com isso, você obterá um resultado em cm³. Depois, precisamos converter para m³ (pois o enunciado pede a resposta nessa unidade).

Conversão de Unidades mais Comuns		
De:	Para:	Ação:
cm ³	mL	São equivalentes. 1 cm ³ = 1 mL.
dm ³	L	São equivalentes. 1 dm ³ = 1 L.
m ³	L	Multiplicamos por mil. 1 m ³ = 1000 L
mL	L	Dividimos por mil. 1000 mL = 1 L
cm ³	m ³	Dividimos por 1 milhão. 1000000 cm ³ = 1 m ³

Que tal praticar refazendo o exercício dessa forma? Fica o exercício!

Gabarito: LETRA D.

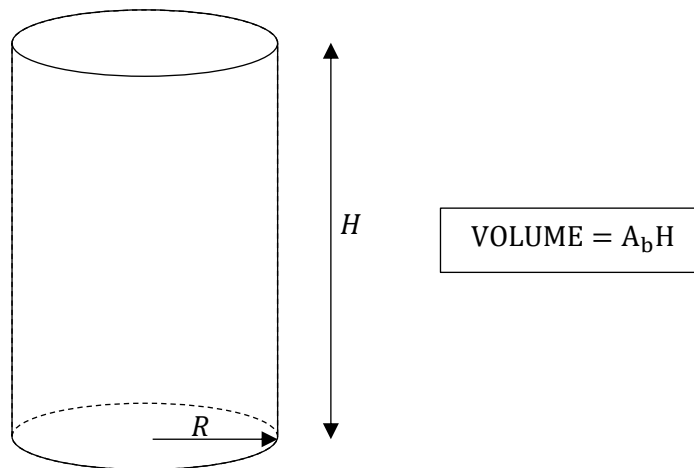
6. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) A caixa d'água de um prédio público tem a forma de um cilindro reto de diâmetro $d = 3,2$ m e altura $h = 4$ m. Então, assumindo-se a aproximação $\pi = 3$, a capacidade dessa caixa d'água será de



- A) 3 072 L.
- B) 12 288 L.
- C) 30 720 L.
- D) 48 080 L.
- E) 122 880 L.

Comentários:

A questão quer a **capacidade (volume)** da caixa d'água (que é um cilindro reto). Logo, lembre-se da aula:



- Em um cilindro reto, **a base é uma circunferência** e, portanto,

$$A_b = \pi R^2$$

O enunciado forneceu o diâmetro! Sabemos que **o diâmetro é o dobro do raio**.

$$D = 2R \quad \rightarrow \quad 3,2 = 2R \quad \rightarrow \quad R = 1,6 \, m$$

Podemos calcular a área da base:

$$A_b = 3 \cdot 1,6^2 \quad \rightarrow \quad A_b = 3 \cdot 2,56 \quad \rightarrow \quad A_b = 7,68 \, m^2$$

Além disso, **temos a altura ($h = 4 \, m$)**. Podemos substituir todas essas informações na fórmula do volume de um cilindro.

$$V = A_b \cdot H \quad \rightarrow \quad V = 7,68 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad V = 30,72 \, m^3$$

Agora, perceba que **as respostas estão em litros**. Lembre-se da nossa tabela de conversão:



Assim, de **m³ para litros**, multiplicamos por 1.000.

$$V = 30,72 \cdot 1000 \rightarrow V = 30.720 L$$

Gabarito: LETRA C.

7. (VUNESP/AVAREPREV/2020) Certo suco é vendido em latinhas de alumínio, no formato de cilindro. Cada latinha contém 270 mL de suco, o que corresponde a 9/10 do volume total da latinha, se utilizado $\pi=3$. Se o diâmetro da latinha é de 6 cm, e cada cm³ corresponde a 1 mL, então a altura de cada latinha é de, aproximadamente,

- A) 8 cm.
- B) 9 cm.
- C) 10 cm.
- D) 11 cm.
- E) 12 cm.

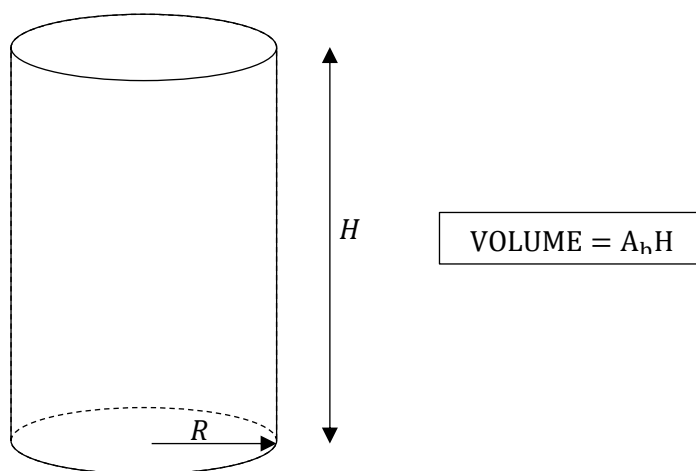
Comentários:

Observe que a latinha contém 270 mL (cm³) de suco. **Esse volume corresponde a 9/10 (ou 90%) do volume total**. Com essa informação inicial, podemos calcular o volume total da latinha.

$$0,9 \cdot V = 270 \rightarrow V = \frac{270}{0,9} \rightarrow V = 300 \text{ mL}$$

Pronto, o volume total da latinha é 300 mL.

- O volume de um cilindro é dado pelo **produto da área da base pela altura**.



O enunciado deu o diâmetro da base. Lembre-se que **ele é o dobro do raio**. Assim,

$$R = \frac{D}{2} \rightarrow R = \frac{6}{2} \rightarrow R = 3 \text{ cm}$$

Agora, conseguimos determinar A_b .

$$A_b = \pi R^2 \rightarrow A_b = 3 \cdot 3^2 \rightarrow A_b = 27 \text{ cm}^2$$

Com o volume e a área da base, devemos **substituir os valores** encontrados para encontrar h .

$$V = A_b \cdot H \rightarrow H = \frac{V}{A_b} \rightarrow H = \frac{300}{27} \rightarrow \mathbf{H \cong 11,1 \text{ cm}}$$

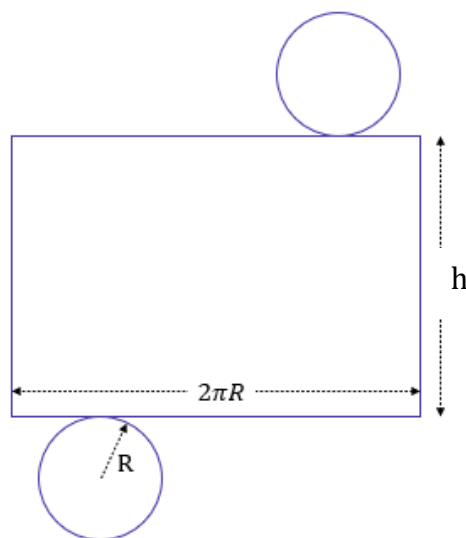
Gabarito: LETRA D.

8. (VUNESP/PREF. DOIS CORRÉGOS/2019) Um cilindro reto tem 10 cm de altura e base com diâmetro de 40 cm. A área da superfície total desse cilindro, em cm^2 , é

- A) 2000π
- B) 1600π
- C) 1400π
- D) 1200π
- E) 1000π

Comentários:

Opa, vamos ver como fica a planificação desse cilindro reto!



A área lateral do cilindro é **a área de um retângulo** em que as dimensões são **a altura e o comprimento da circunferência**. Logo,

$$A_L = 2\pi R \cdot h \rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10 \rightarrow A_L = 400\pi \text{ cm}^2$$

Estamos procurando **a área superficial total**. Para encontrá-la, devemos **somar a área lateral com as áreas das duas bases**. As bases do cilindro são **circunferências de raio igual a 20 cm** (metade do diâmetro). Assim,

$$A_b = \pi \cdot 20^2 \rightarrow A_b = 400\pi \text{ cm}^2$$

Já a área superficial total fica:

$$A_{\text{total}} = A_L + 2 \cdot A_b \rightarrow A_{\text{total}} = 400\pi + 2 \cdot 400\pi \rightarrow \mathbf{A_{\text{total}} = 1200\pi \text{ cm}^2}$$

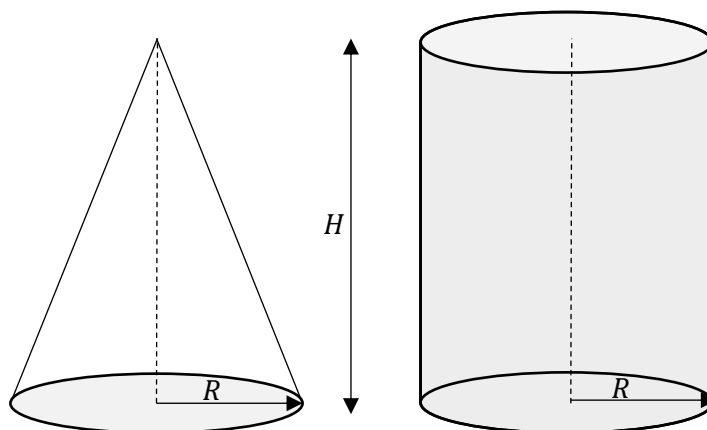
Gabarito: LETRA D.

9. (VUNESP/PREF. RIBEIRÃO PRETO/2019) Considere um cilindro A e um cone B, de mesma altura e mesma base. A relação entre os volumes V_A e V_B , do cilindro e do cone, respectivamente, é

- A) $V_B = 6V_A$
- B) $V_A = 6V_B$
- C) $V_B = 3V_A$
- D) $V_A = 3V_B$
- E) $V_B = 2V_A$

Comentários:

Observe a situação.



- O volume de um **cilindro** é dado por:



$$V_A = A_b H$$

- O volume de um cone de mesma base e altura é dado por:

$$V_B = \frac{A_b H}{3}$$

Observe que o numerador da fração acima é igual ao volume do cilindro. Assim,

$$V_B = \frac{V_A}{3} \quad \rightarrow \quad V_A = 3V_B$$

Gabarito: LETRA D.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

Cone

1. (VUNESP/PREF. SJRP/2023) Um enfeite de porcelana no formato de um cone circular reto tem 10 cm de altura e volume aproximado de $3140/3 \text{ cm}^3$. O diâmetro da base desse vaso é de, aproximadamente:

- A) 20 cm.
- B) 10 cm.
- C) 15 cm.
- D) 25 cm.
- E) 30 cm.

Comentários:

Sabemos que **o volume de um cone** pode ser encontrado por meio da seguinte expressão:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Como temos o valor do volume ($3140/3 \text{ cm}^3$) e da altura (10 cm), podemos encontrar **o raio**:

$$\frac{3140}{3} = \frac{3,14 \cdot R^2 \cdot 10}{3} \quad \rightarrow \quad R^2 = 100 \quad \rightarrow \quad \boxed{R = 10 \text{ cm}}$$

A questão pede **o diâmetro do vaso**, ou seja, o dobro do raio.

$$D = 2R$$

$$D = 2 \cdot 10$$

$$\boxed{D = 20 \text{ cm}}$$

Gabarito: LETRA A.

2. (VUNESP/PREF. RP/2019) Considere um cilindro A e um cone B, de mesma altura e mesma base. A relação entre os volumes V_A e V_B , do cilindro e do cone, respectivamente, é

- A) $V_B = 6V_A$
- B) $V_A = 6V_B$
- C) $V_B = 3V_A$
- D) $V_A = 3V_B$
- E) $V_B = 2V_A$



Comentários:

O volume do cone é dado por:

$$VB = \frac{A_b H}{3} \quad (1)$$

Por sua vez, o volume do cilindro é:

$$VA = A_b H \quad (2)$$

Como os sólidos possuem a **mesma altura e a mesma base**, podemos usar (2) em (1):

$$VB = \frac{VA}{3}$$

$$\boxed{VA = 3VB}$$

Gabarito: LETRA D.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

Esfera

1. (VUNESP/PREF. CAMPINAS/2022) Em uma aula sobre geometria métrica espacial, os alunos tomaram as medidas de um lápis, que estão indicadas na figura.



Na situação descrita, o valor que melhor aproxima o volume do lápis, em cm^3 , é

- A) 13,35.
- B) 15,07.
- C) 14,44.
- D) 15,70.
- E) 13,08.

Comentários:

Nessa questão, precisaremos calcular o volume de três sólidos: **cone**, **cilindro** e **semiesfera**.

- Cálculo do volume da **ponta do lápis** (cone circular reto):

$$V_{\text{ponta}} = \frac{A_b H}{3} \rightarrow V_{\text{ponta}} = \frac{3,14 \cdot (0,5)^2 \cdot 2}{3} \rightarrow V_{\text{ponta}} = 0,523 \text{ cm}^3$$

- Cálculo do volume do **corpo do lápis** (cilindro circular reto):

$$V_{\text{corpo}} = A_b H \rightarrow V_{\text{corpo}} = 3,14 \cdot (0,5)^2 \cdot 16 \rightarrow V_{\text{corpo}} = 12,56 \text{ cm}^3$$

- Cálculo do volume da **borracha** (semiesfera - metade de uma esfera):

$$V_{\text{borracha}} = \frac{2\pi R^3}{3} \rightarrow V_{\text{borracha}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,5^3}{3} \rightarrow V_{\text{borracha}} = 0,261 \text{ cm}^3$$

Pronto! O volume do lápis é **a soma** desses três volumes.

$$V_{\text{lapis}} = V_{\text{ponta}} + V_{\text{corpo}} + V_{\text{borracha}}$$



$$V_{\text{lapis}} = 0,523 + 15,26 + 0,261$$

$$V_{\text{lapis}} \cong 13,35 \text{ cm}^3$$

Gabarito: LETRA A.

2. (VUNESP/PREF. SJC/2019) Uma garrafinha de suco tem a parte interna no formato esférico, com diâmetro de 12 cm. Arredondando-se π para 3, tem-se o volume correto de suco que é colocado nessa garrafinha, para a comercialização. Se cada cm^3 corresponde a 1 mL, no rótulo dessa garrafinha consta que o volume de suco nela contida é de

- A) 144 mL.
- B) 576 mL.
- C) 864 mL.
- D) 1256 mL.
- E) 2592 mL.

Comentários:

Sabemos que o volume de uma esfera pode ser calculado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

O enunciado informa que **o diâmetro dessa esfera é 12 cm**. Portanto, **o raio é 6 cm**.

$$V = \frac{4 \cdot 3 \cdot 6^3}{3}$$

$$V = 864 \text{ cm}^3$$

Como cada cm^3 equivale a 1 mL:

$$V = 864 \text{ mL}$$

Gabarito: LETRA C.

3. (VUNESP/PREF. DE GARÇA/2018) A bolinha que é utilizada no jogo de sinuca, ou de bilhar, é um objeto que pode ser dado como exemplo de representante de

- A) circunferência.
- B) cilindro.
- C) círculo.



- D) cone.
- E) esfera.

Comentários:

Questão bem direta! Devemos reconhecer que uma bola de bilhar tem o **formato de esfera**.



Gabarito: LETRA E.

4. (VUNESP/PREF. SERTÃOZINHO/2018) Considere os seguintes objetos reais para trabalhar formas geométricas:



Os objetos 1 e 2, nessa ordem, podem ser corretamente utilizados como representantes de

- A) quadrado e esfera.
- B) quadrado e circunferência.
- C) cubo e esfera.
- D) cubo e circunferência.
- E) cubo e círculo.

Comentários:

Mais uma questão para identificarmos os representantes dos objetos dados.

Note que o dado tem o formato de um **cubo**, enquanto a bola de bilhar tem o formato de uma **esfera**.

Gabarito: LETRA C.



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Introdução

1. (VUNESP/PREF. PRES. PRUDENTE/2022) A diferença entre as medidas de dois ângulos complementares é de $22^{\circ}44'$. A bissetriz do menor desses ângulos o divide em outros dois ângulos, cada um deles com medida de

- A) $14^{\circ}23'$
- B) $15^{\circ}17'$
- C) $15^{\circ}27'$
- D) $16^{\circ}49'$
- E) $16^{\circ}59'$

2. (VUNESP/PREF. F. VASCONCELOS/2018) As imagens a seguir apresentam algumas posições de dança. Destacado em branco está o ângulo correto das pernas para execução da posição.



Dentre as posições apresentadas, as duas em que a angulação das pernas é superior à de um ângulo reto são as posições

- A) 1 e 2.
- B) 1 e 3.
- C) 2 e 3.
- D) 2 e 4.
- E) 3 e 4.



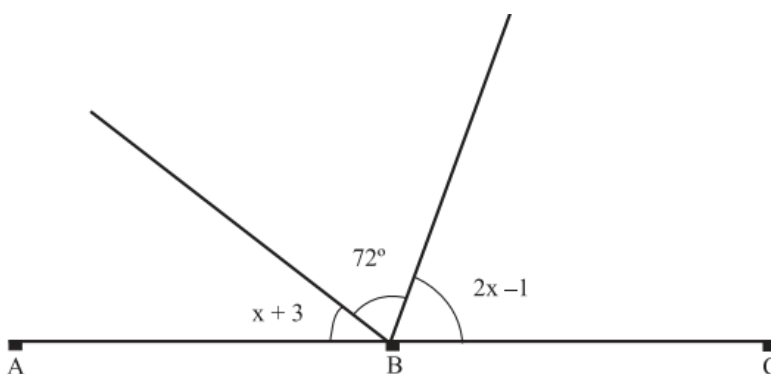
3. (VUNESP/SAP-SP/2013) Um arquiteto, em um de seus projetos, fez algumas medições e dentre elas mediu dois ângulos complementares. Um desses ângulos mediu 65° e o outro,

- A) 115° .
- B) 90° .
- C) 180° .
- D) 25° .
- E) 60° .

4. (VUNESP/FAPESP/2012) Sobre as medidas m e n , respectivamente dos ângulos $\hat{M}$ e $\hat{N}$, sabe-se o seguinte: a soma delas é equivalente à medida de um ângulo raso e a diferença entre elas é equivalente à medida de um ângulo reto. Supondo-se o ângulo $\hat{M}$ com a maior medida, uma possível relação entre m e n é

- A) $m = 2n$.
- B) $m = 3n$.
- C) $m = 4n$.
- D) $m = 5n$.
- E) $m = 6n$.

5. (VUNESP/SPPREV/2009) Na figura, os pontos A, B e C são colineares e B é vértice comum dos três ângulos em destaque.



Sabendo-se que as medidas desses ângulos estão indicadas em graus, conclui-se que o valor de x é igual a

- A) 30° .
- B) 32° .
- C) $35^\circ 20'$.
- D) $35^\circ 33'$.
- E) 36° .



GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA E
3. LETRA D
4. LETRA B
5. LETRA C



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Prisma

1. (VUNESP/PREF. MARÍLIA/2023) O comprimento de um paralelepípedo reto-retângulo excede sua profundidade em 4 cm. Se a altura desse paralelepípedo é 7 cm, e sua área total é 344 cm^2 , seu volume, em cm^3 , é
- A) 350.
B) 420.
C) 490.
D) 560.
E) 630.
2. (VUNESP/PM-SP/2023) Um objeto feito em madeira maciça tem o formato de prisma reto com base no formato de losango, cujas diagonais medem 5 cm e 6 cm. Se o volume de madeira contido nesse objeto é de 450 cm^3 , então sua altura, comparada à medida da maior diagonal da sua base, é maior em
- A) 28 cm.
B) 24 cm.
C) 27 cm.
D) 26 cm.
E) 25 cm.
3. (VUNESP/PREF. ARAÇATUBA/2023) Um objeto em madeira maciça tem o formato de prisma reto, com base triangular. A altura desse objeto é de 15 cm e seu volume é de 120 cm^3 . Sabendo-se que a base desse objeto tem o formato de um triângulo retângulo isósceles, as arestas da base que formam o ângulo reto medem
- A) 6,0 cm.
B) 5,5 cm.
C) 5,0 cm.
D) 4,5 cm.
E) 4,0 cm.
4. (VUNESP/PREF. OSASCO/2022) Uma caixa de papelão, na forma de um prisma reto de base retangular, tem suas medidas indicadas na figura.



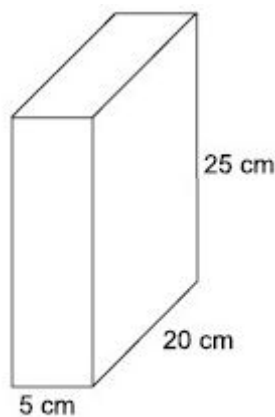


Figura fora de escala

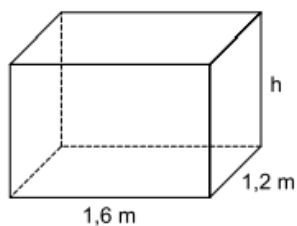
Essa caixa está com $\frac{3}{5}$ de sua capacidade total preenchida com sabão em pó. Se todo esse sabão for dividido em porções de 125 cm^3 cada uma, o número de porções obtidas será

- A) 8
- B) 12
- C) 15
- D) 18
- E) 20

5. (VUNESP/PM-SP/2022) Um paralelepípedo reto-retângulo tem uma de suas faces de maior área apoiada sobre o chão, e, dessa maneira, sua área lateral é 200 cm^2 . Se esse paralelepípedo tivesse uma das faces de menor área apoiada sobre o chão, a área lateral seria 312 cm^2 . Sabendo que a área total do paralelepípedo é 392 cm^2 , sua maior aresta mede

- A) 21 cm.
- B) 20 cm.
- C) 15 cm.
- D) 14 cm.
- E) 12 cm.

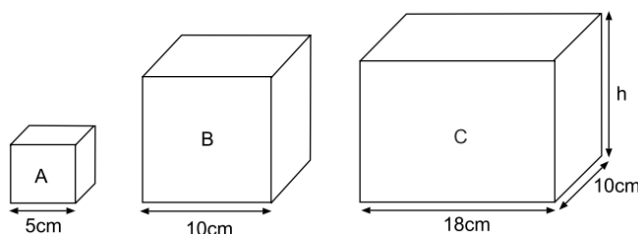
6. (VUNESP/TJ-SP/2018) Um estabelecimento comercial possui quatro reservatórios de água, sendo três deles de formato cúbico, cujas respectivas arestas têm medidas distintas, em metros, e um com a forma de um paralelepípedo reto retângulo, conforme ilustrado a seguir.



Sabe-se que, quando totalmente cheios, a média aritmética dos volumes de água dos quatro reservatórios é igual a $1,53 \text{ m}^3$, e que a média aritmética dos volumes de água dos reservatórios cúbicos, somente, é igual a $1,08 \text{ m}^3$. Desse modo, é correto afirmar que a medida da altura do reservatório com a forma de bloco retangular, indicada por h na figura, é igual a

- A) 1,40 m.
- B) 1,50 m.
- C) 1,35 m.
- D) 1,45 m.
- E) 1,55 m.

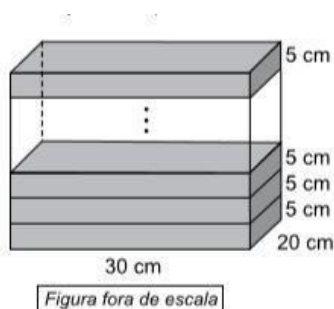
7. (VUNESP/TJ-SP/2017) As figuras seguintes mostram os blocos de madeira A, B e C, sendo A e B de formato cúbico e C com formato de paralelepípedo reto retângulo, cujos respectivos volumes, em cm^3 , são representados por V_A , V_B e V_C .



Se $V_A + V_B = \frac{1}{2} V_C$, então a medida da altura do bloco C, indicada por h na figura, é, em centímetros, igual a

- A) 12,5
- B) 15,5
- C) 14
- D) 16
- E) 11

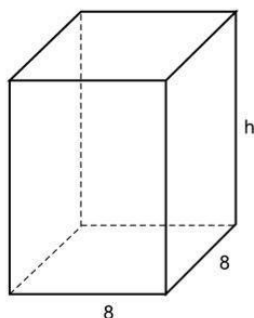
8. (VUNESP/Instituto de Previdência Social dos Servidores Municipais de Valinhos (SP)/2020) Vários blocos de papel, todos iguais entre si, e cada um deles no formato de um prisma reto de base retangular, com 30 cm de comprimento, 20 cm de largura e 5 cm de altura, foram empilhados, conforme mostra a figura.



Se o volume total dessa pilha é $45\,000\text{ cm}^3$, o número de blocos dela é

- A) 11
- B) 12
- C) 13
- D) 14
- E) 15

9. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Piracicaba (SP)/2020) Considere um recipiente com a forma de paralelepípedo reto retângulo e com dimensões, em centímetros, indicadas na figura.



Se colocarmos 576 cm^3 de um líquido nesse recipiente, inicialmente vazio, a quarta parte da sua capacidade total não será preenchida. Nessas condições, é correto afirmar que a medida da altura desse recipiente, indicada por h na figura, é

- A) 14 cm.
- B) 12 cm.
- C) 11 cm.
- D) 10 cm.
- E) 9 cm.

10. (VUNESP/TJ-SP/2015) Dois recipientes (sem tampa), colocados lado a lado, são usados para captar água da chuva. O recipiente A tem o formato de um bloco retangular, com 2 m de comprimento e 80 cm de largura, e o recipiente B tem a forma de um cubo de 1 m de aresta. Após uma chuva, cuja precipitação foi uniforme e constante, constatou-se que a altura do nível da água no recipiente B tinha aumentado 25 cm, sem transbordar. Desse modo, pode-se concluir que a água captada pelo recipiente A nessa chuva teve volume aproximado, em m^3 , de

- A) 0,40.
- B) 0,36.
- C) 0,32.
- D) 0,30.
- E) 0,28.



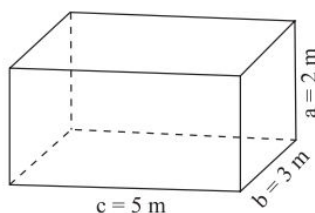
11. (VUNESP/TJ-SP/2014) Considere um reservatório com o formato de um paralelepípedo reto retângulo, com 2 m de comprimento e 1,5 m de largura, inicialmente vazio. A válvula de entrada de água no reservatório foi aberta por certo período, e, assim, a altura do nível da água no reservatório atingiu 50 cm, preenchendo 40% da sua capacidade total. Desse modo, é correto afirmar que a medida da altura desse reservatório, em metros, é igual a

- A) 1,50.
- B) 1,35.
- C) 1,75.
- D) 1,65.
- E) 1,25.

12. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Araçatuba (SP)/2019) Um reservatório de água tem formato interno de prisma reto retangular, com arestas medindo, em metros, 10, 10 e 5. A capacidade máxima, em litros, desse reservatório

- A) 5000
- B) 25000
- C) 50000
- D) 250000
- E) 500000

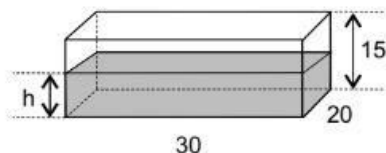
13. (VUNESP/TJ-SP/2006) A figura mostra uma caixa d'água em forma de um paralelepípedo reto retângulo, com medidas em metros. Aumentando-se em um quinto a medida do comprimento (c), e mantendo-se inalterados volume (V) e altura (a), teremos uma nova caixa, cuja largura (b) será igual a (Dado: $V = abc$).



- A) 2,9 m.
- B) 2,8 m.
- C) 2,7 m.
- D) 2,5 m.
- E) 2,2 m.

14. (VUNESP/Instituto de Previdência do Município de Marília (SP)/2019) Em uma lata vazia, que tem a forma de um prisma reto de base retangular, com 15 cm de altura, foi colocado açúcar, conforme mostra a figura, cujas medidas indicam as dimensões internas da lata, em centímetros.





(Figura fora de escala)

Sabendo que esse açúcar ocupou 80% do volume total da lata, então, a altura do açúcar nessa lata, indicada na figura pela letra h , é de

- A) 14 cm.
- B) 12 cm.
- C) 10 cm.
- D) 8 cm.
- E) 6 cm.

15. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Sorocaba (SP)/2019) Um reservatório d'água no formato interno de paralelepípedo reto retangular tem altura interna de 15 metros e comporta um volume total de 135 metros cúbicos de água. Sabendo-se que a base desse reservatório é quadrada, a soma das medidas de todas as arestas internas desse reservatório, em metros, é igual a

- A) 24
- B) 39
- C) 54
- D) 69
- E) 84

16. (VUNESP/Escola Superior de Educação Física de Jundiaí (SP)/2019) Em um recipiente na forma de um prisma reto de base retangular, colocou-se água, conforme mostra a figura, na qual estão indicadas as medidas internas, em centímetros.

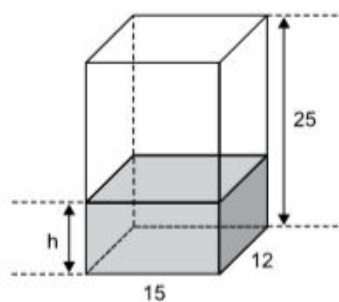


figura fora de escala

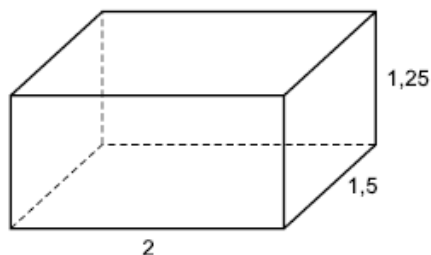
Lembrando que 1 litro = 1 000 cm^3 , e que a altura da água dentro do recipiente, indicada na figura pela letra h , corresponde a $\frac{2}{5}$ da altura total do recipiente, então, a quantidade de água, em litros, colocada dentro dele foi igual a

- A) 1,5
- B) 1,6



- C) 1,7
- D) 1,8
- E) 1,9

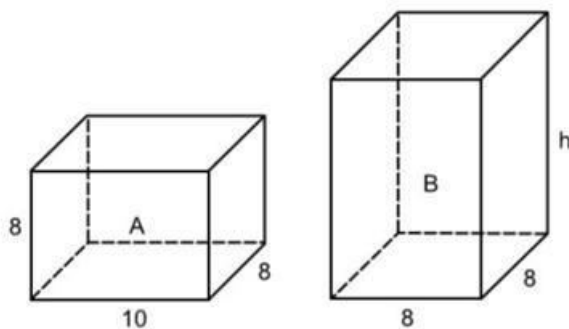
17. (VUNESP/Escola Superior de Educação Física de Jundiaí (SP)/2019) Considere um reservatório, com formato de paralelepípedo reto retângulo e com as dimensões indicadas em metros na figura, que está completamente cheio de água.



Esse reservatório será esvaziado na razão de $0,15 \text{ m}^3$ de água a cada 15 minutos. Se o processo de esvaziamento for iniciado às 8 horas e 15 minutos, e não houver interrupções, ele estará totalmente concluído às

- A) 15 horas e 30 minutos.
- B) 14 horas e 40 minutos.
- C) 14 horas e 30 minutos.
- D) 14 horas e 15 minutos.
- E) 13 horas e 45 minutos.

18. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Campinas (SP)/2019) Considere as embalagens A e B, desenvolvidas para determinado produto. As duas têm formato de paralelepípedo reto retângulo, e dimensões indicadas em centímetros nas figuras.



Os preços de custo da embalagem A é R\$ 20,00 e da embalagem B é R\$ 30,00 e são diretamente proporcionais aos respectivos volumes. A medida da altura da embalagem B, indicada por h na figura, é igual a

- A) 14 cm



- B) 12 cm
- C) 13 cm
- D) 11 cm
- E) 15 cm

19. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) Um recipiente no formato interno de paralelepípedo reto, de altura 5 cm e base retangular, em que a medida da maior aresta excede em 1 cm a medida da menor aresta, tem volume total de 150 cm^3 . A medida, em cm, da maior aresta da base desse recipiente é

- A) 10
- B) 9
- C) 8
- D) 7
- E) 6

20. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) Um reservatório de forma cúbica teve 25% de seu volume preenchido por um líquido A, 60% por um líquido B, e os 259,2 litros restantes foram preenchidos por um líquido C. Então, o valor da medida da aresta do reservatório cúbico é igual a

- A) 1,2 m.
- B) 3,6 m.
- C) 5,76 m.
- D) 8,6 m.
- E) 12 m.



GABARITO

1. LETRA B
2. LETRA B
3. LETRA E
4. LETRA B
5. LETRA E
6. LETRA B
7. LETRA A
8. LETRA E
9. LETRA B
10. LETRA A

11. LETRA E
12. LETRA E
13. LETRA D
14. LETRA B
15. LETRA E
16. LETRA D
17. LETRA C
18. LETRA E
19. LETRA E
20. LETRA A



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Pirâmide

1. (VUNESP/ISS-JAGUARIÚNA/2023) Uma peça em metal maciço tem o formato de pirâmide reta, com altura de 20 cm e base no formato de losango, com diagonais medindo 10 cm e 12 cm. Seu valor comercial está associado ao volume do metal utilizado na sua fabricação, sendo cada cm^3 do referido material comercializado a R\$ 1,50. Sendo assim, o valor comercial desta peça é de

- A) R\$ 400,00.
- B) R\$ 600,00.
- C) R\$ 900,00.
- D) R\$ 1.200,00.
- E) R\$ 1.800,00.

2. (VUNESP/PREF. JUNDIAÍ/2023) Um peso para papel tem o formato de pirâmide reta, com volume de 96 cm^3 e base quadrada. Sendo o perímetro da base igual a 24 cm, a altura dessa pirâmide é de

- A) 7,0 cm.
- B) 7,5 cm.
- C) 8,0 cm.
- D) 8,5 cm.
- E) 9,0 cm.

3. (VUNESP/PREF. SJRP/2023) Um objeto em formato de uma pirâmide reta de base quadrada tem altura igual a 8 cm. Se a aresta da base mede 12 cm, então a área total desse objeto, em cm^2 , é

- A) 248.
- B) 356.
- C) 384.
- D) 432.
- E) 482.

4. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Balneária de Peruíbe (SP)/2019) Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de 100 cm^3 . A área da base dessa pirâmide, em cm^2 , é

- A) 25
- B) 26
- C) 30
- D) 36
- E) 50



5. (VUNESP/PREF. MORRO AGUDO/2020) Uma peça em madeira maciça, com formato de pirâmide reta de base quadrada, tem volume de 484 cm^3 e altura de 12 cm. Logo, a aresta da base dessa peça mede

- A) 14 cm.
- B) 13 cm.
- C) 12 cm.
- D) 11 cm.
- E) 10 cm.

6. (VUNESP/PREF. PERUÍBE/2019) Uma pirâmide de base retangular e altura 12 cm tem volume de 100 cm^3 . A área da base dessa pirâmide, em cm^2 , é

- A) 25.
- B) 26.
- C) 30.
- D) 36.
- E) 50.



GABARITO

1. LETRA B
2. LETRA C
3. LETRA C
4. LETRA A
5. LETRA D
6. LETRA A



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Cilindro

1. (VUNESP/PREF. SP/2023) Um fiscal encontrou em uma feira livre um vendedor de água sanitária vendendo esse produto em um recipiente cilíndrico de diâmetro 8 cm e altura 15 cm. O produto era oferecido como se no recipiente houvesse 1 litro de água sanitária e o vendedor cobrava R\$ 2,50 por recipiente. Mantida a proporção, o preço por litro de água sanitária que esse vendedor de fato está cobrando está entre (Dados: $\pi = 3,14$)

- A) R\$ 2,90 e R\$ 3,00.
- B) R\$ 3,30 e R\$ 3,40.
- C) R\$ 3,00 e R\$ 3,10.
- D) R\$ 3,10 e R\$ 3,20.
- E) R\$ 3,20 e R\$ 3,30.

2. (VUNESP/PREF. SJRP/2023) Adotando-se $\pi = 3,14$, quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados em um cartucho de tinta para caneta tinteiro, com a forma de um cilindro circular reto com paredes de espessuras desprezíveis, sabendo-se que o diâmetro da base circular do cartucho é 6 mm e sua altura é 7 cm?

- A) 19,782 mL.
- B) 1,9782 mL.
- C) 0,19782 mL.
- D) 0,019872 mL.
- E) 0,0019782 mL.

3. (VUNESP/PREF. CAMPINAS/2022) O interior de um reservatório tem um formato cilíndrico, com sua altura correspondendo a 3 vezes o comprimento do diâmetro de sua base. Sendo a capacidade aproximada desse reservatório de 150720 litros, a sua área lateral interna é de, aproximadamente,

- A) 143 m².
- B) 162 m².
- C) 170 m².
- D) 151 m².
- E) 132 m².

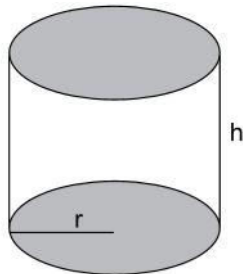
4. (VUNESP/PREF. GUARATINGUETÁ/2022) A área lateral de um cilindro circular reto com altura de 5 cm e diâmetro de base igual a 20 cm é de, aproximadamente,

- A) 160 cm².
- B) 315 cm².
- C) 365 cm².



- D) 415 cm^2 .
- E) 620 cm^2 .

5. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Campinas (SP)/2019) Analise o sólido geométrico da figura



Se $h = 48 \text{ cm}$ e $r = 17 \text{ cm}$, esse sólido tem um volume de:

- A) $0,082 \text{ m}^3$
- B) $0,068 \text{ m}^3$
- C) $0,123 \text{ m}^3$
- D) $0,044 \text{ m}^3$
- E) $0,246 \text{ m}^3$

6. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) A caixa d'água de um prédio público tem a forma de um cilindro reto de diâmetro $d = 3,2 \text{ m}$ e altura $h = 4 \text{ m}$. Então, assumindo-se a aproximação $\pi = 3$, a capacidade dessa caixa d'água será de

- A) 3 072 L.
- B) 12 288 L.
- C) 30 720 L.
- D) 48 080 L.
- E) 122 880 L.

7. (VUNESP/AVAREPREV/2020) Certo suco é vendido em latinhas de alumínio, no formato de cilindro. Cada latinha contém 270 mL de suco, o que corresponde a $\frac{9}{10}$ do volume total da latinha, se utilizado $\pi=3$. Se o diâmetro da latinha é de 6 cm, e cada cm^3 corresponde a 1 mL, então a altura de cada latinha é de, aproximadamente,

- A) 8 cm.
- B) 9 cm.
- C) 10 cm.
- D) 11 cm.
- E) 12 cm.



8. (VUNESP/PREF. DOIS CORRÉGOS/2019) Um cilindro reto tem 10 cm de altura e base com diâmetro de 40 cm. A área da superfície total desse cilindro, em cm^2 , é

- A) 2000π
- B) 1600π
- C) 1400π
- D) 1200π
- E) 1000π

9. (VUNESP/PREF. RIBEIRÃO PRETO/2019) Considere um cilindro A e um cone B, de mesma altura e mesma base. A relação entre os volumes V_A e V_B , do cilindro e do cone, respectivamente, é

- A) $V_B = 6V_A$
- B) $V_A = 6V_B$
- C) $V_B = 3V_A$
- D) $V_A = 3V_B$
- E) $V_B = 2V_A$



GABARITO

1. LETRA B
2. LETRA B
3. LETRA D
4. LETRA B
5. LETRA D
6. LETRA C
7. LETRA D
8. LETRA D
9. LETRA D



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Cone

1. (VUNESP/PREF. SJRP/2023) Um enfeite de porcelana no formato de um cone circular reto tem 10 cm de altura e volume aproximado de $3140/3 \text{ cm}^3$. O diâmetro da base desse vaso é de, aproximadamente:

- A) 20 cm.
- B) 10 cm.
- C) 15 cm.
- D) 25 cm.
- E) 30 cm.

2. (VUNESP/PREF. RP/2019) Considere um cilindro A e um cone B, de mesma altura e mesma base. A relação entre os volumes V_A e V_B , do cilindro e do cone, respectivamente, é

- A) $V_B = 6V_A$
- B) $V_A = 6V_B$
- C) $V_B = 3V_A$
- D) $V_A = 3V_B$
- E) $V_B = 2V_A$



GABARITO

1. LETRA A
2. LETRA D



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Esfera

1. (VUNESP/PREF. CAMPINAS/2022) Em uma aula sobre geometria métrica espacial, os alunos tomaram as medidas de um lápis, que estão indicadas na figura.



Na situação descrita, o valor que melhor aproxima o volume do lápis, em cm^3 , é

- A) 13,35.
- B) 15,07.
- C) 14,44.
- D) 15,70.
- E) 13,08.

2. (VUNESP/PREF. SJC/2019) Uma garrafinha de suco tem a parte interna no formato esférico, com diâmetro de 12 cm. Arredondando-se π para 3, tem-se o volume correto de suco que é colocado nessa garrafinha, para a comercialização. Se cada cm^3 corresponde a 1 mL, no rótulo dessa garrafinha consta que o volume de suco nela contida é de

- A) 144 mL.
- B) 576 mL.
- C) 864 mL.
- D) 1256 mL.
- E) 2592 mL.

3. (VUNESP/PREF. DE GARÇA/2018) A bolinha que é utilizada no jogo de sinuca, ou de bilhar, é um objeto que pode ser dado como exemplo de representante de

- A) circunferência.
- B) cilindro.
- C) círculo.
- D) cone.
- E) esfera.

4. (VUNESP/PREF. SERTÃOZINHO/2018) Considere os seguintes objetos reais para trabalhar formas geométricas:





Os objetos 1 e 2, nessa ordem, podem ser corretamente utilizados como representantes de

- A) quadrado e esfera.
- B) quadrado e circunferência.
- C) cubo e esfera.
- D) cubo e circunferência.
- E) cubo e círculo.



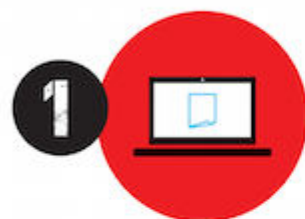
GABARITO

1. LETRA A
2. LETRA C
3. LETRA E
4. LETRA C



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.